

# GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

## Deuxième partie : de Hamilton (1834) à Feynman (1942)

Abdelmadjid MESLI

Aix-Marseille Université, CNRS,  
IM2NP UMR7334,  
13397 Marseille Cedex 20, France  
[abdelmadjid.mesli@im2np.fr](mailto:abdelmadjid.mesli@im2np.fr)

La deuxième partie de l'article consacré au principe de moindre action couvre la période allant de Hamilton (1834) à Feynman (1942). L'approche originale de Hamilton constitue sans doute la transition vers la révolution quantique qui verra le jour environ soixante-dix ans après, en 1900, lorsque Planck parvient à modéliser l'émission du corps noir en introduisant le quantum d'action.

L'explication dans la foulée par Einstein de l'effet photoélectrique, avec comme conséquence l'établissement, pour le moins inattendu, du caractère granulaire de la lumière, a conduit De Broglie à établir la réciproque pour la matière, à savoir sa nature ondulatoire. La prédiction de Hamilton d'un lien entre l'optique ondulatoire et la mécanique est ensuite confirmée et concrétisée par l'équation de la mécanique quantique qu'établit Schrödinger, inspiré par les travaux de De Broglie. Enfin, Feynman donne à l'histoire du principe de moindre action, et en particulier à celle du principe de Fermat une tournure assez surprenante comme il sera décrit dans le présent article.

Dans l'histoire du développement du principe de moindre action, les contributions de Hamilton et Jacobi constituent sans aucun doute un tournant décisif dans l'approfondissement des idées en physique. Partant des travaux d'Euler – Lagrange, pour lesquels Hamilton éprouvait une réelle fascination, il posa avec Jacobi les bases formelles qui ont servi, environ un siècle après, à l'établissement de la mécanique quantique. La reformulation dite canonique entreprise par Hamilton consiste à traiter l'état d'un système par les variables conjuguées que sont la position et le moment, plutôt que par la position et la vitesse, voie utilisée initialement par Euler et Lagrange. Ce travail monumental avait pour trame l'équivalent optique de la mécanique, tel que Fermat et Maupertuis l'avaient perçu et que Bernoulli l'avait illustré dans le cas du brachistochrone.

Le présent article commencera par une description assez succincte de l'apport de Hamilton et Jacobi. L'équation de Hamilton-Jacobi énonçant les lois de la physique directement

à partir de l'action, au lieu du lagrangien ou hamiltonien, constitue la transition vers la mécanique quantique de De Broglie – Schrödinger. Cependant, cette nouvelle mécanique devait attendre une autre révolution qui se déroulera en trois étapes. La première est l'avènement du quantum d'action que Planck introduit pour expliquer le rayonnement du corps noir. Elle est suivie dans une deuxième étape par le concept de photon qu'Einstein introduit pour expliquer l'effet photoélectrique. Un concept qui *de facto* établit la dualité onde – corpuscule de la lumière. La troisième étape est la généralisation par De Broglie de cette dualité de la matière apportant un éclatant soutien à l'idée centrale de Hamilton sur la similitude entre mécanique et optique ondulatoire. Elle aboutira à l'établissement par Schrödinger de son équation. Enfin, cet article sera clos par l'apport de Feynman qui consiste à revenir sur les pas de Fermat en ressuscitant l'image du « rayon optique » associé au photon. Feynman déclare que le photon en allant d'un point à un autre emprunte toutes les voies possibles et que le résultat du processus est affaire de probabilité.

### Concept de coordonnées et impulsions généralisées

Par souci de simplification du formalisme mathématique et pour des raisons de commodité, la première partie de cet article [1] considérait uniquement les coordonnées cartésiennes et parfois, seul le mouvement à une dimension était envisagé. Il est évident que tous les phénomènes ont lieu dans un espace à trois dimensions, que le mouvement n'est pas toujours une simple translation et donc que les coordonnées ne sont pas forcément cartésiennes. En effet

selon le type de problème posé, le choix d'un autre système de coordonnées peut s'avérer plus commode, comme par exemple dans le cas du mouvement dans un champ central, pour lequel les coordonnées polaires sont préférables. On parle ainsi de coordonnées dites généralisées pour lesquelles les équations d'Euler - Lagrange et plus tard celles de Hamilton sont univoques, pourvu qu'elles satisfassent un certain nombre de conditions. Parmi celles-ci, les coordonnées doivent être indépendantes et complètes, on parle alors de degrés de liberté. Pour  $N$  corps en mouvement il y a lieu de définir  $3N$  coordonnées cartésiennes et  $s$  degrés de liberté avec  $s \leq 3N$ . L'indépendance signifie que, si dans un système en mouvement, toutes les coordonnées sont fixées sauf une, le système doit pouvoir continuer à se mouvoir selon la coordonnée restée libre. La notion de coordonnées complètes veut dire que celles qui sont choisies doivent permettre de localiser chaque partie du système. Si nous considérons l'exemple d'un double pendule oscillant sur un plan vertical, comme l'illustre la *figure 1*, les quatre coordonnées cartésiennes, deux pour chaque pendule, ne sont clairement ni indépendantes ni complètes. Chaque pendule est caractérisé par les coordonnées  $x_i, y_i$  ( $i = 1,2$ ) où  $y_i$  dépend de  $x_i$ . Si on fixe  $x_1$  et  $x_2$ , le système est gelé. Par contre, dans cet exemple précis, les deux coordonnées polaires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont indépendantes et complètes. En résumé, les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$ , et les vitesses correspondantes  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ , en général représentées par les rayons vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$ , sont, en coordonnées généralisées, remplacées par  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$ . Ces dernières peuvent désigner aussi bien  $\mathbf{r}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  que  $\varphi$  et  $\dot{\varphi}$ , s'il s'agit de coordonnées polaires, c'est pourquoi  $\mathbf{q}$  et  $\dot{\mathbf{q}}$  ont un caractère plus général. Le lagrangien, exprimé à une dimension cartésienne, devient, pour une particule, en termes de coordonnées généralisées dans un espace à trois dimensions,

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q) \quad (1)$$

Cette relation, couplée au principe de moindre action, permet de déterminer d'une façon complète et univoque l'état d'un système et de prédire son mouvement ou son état futur.

Le deuxième point essentiel qui nous permettra de comprendre la pertinence de l'approche hamiltonienne ci dessous est de considérer non pas la vitesse généralisée  $\dot{q}$  mais le moment conjugué ou impulsion généralisée  $p$ . La raison principale d'une telle transformation vient du fait que dans le lagrangien la relation de proportionnalité,  $p = m\dot{r}$ , désignant la quantité de mouvement, n'est valable que dans le cas des coordonnées cartésiennes, et dans le cas où la force ne dépend pas de la vitesse. Cette relation

de proportionnalité cesse évidemment d'être valable avec les coordonnées non cartésiennes ainsi que dans le cas de la force de Lorentz en électromagnétisme, dans laquelle la vitesse apparaît comme une variable de la force. Si par exemple nous considérons l'atome, dont il sera question plus loin, trois degrés de liberté en coordonnées sphériques ( $r, \theta, \varphi$ ) seront définis, conduisant à trois types de moments conjugués,  $p_r = m\dot{r}$ ,  $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$  et  $p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$ . Le premier exprime une quantité de mouvement et les deux autres représentent les moments angulaires, tous ne s'exprimant pas dans la même unité. Avec la considération des coordonnées et impulsions généralisées, Hamilton lève toutes les difficultés et étend d'une façon élégante l'approche lagrangienne.

### L'idée prophétique de Hamilton

William Rowan Hamilton, qui est très familier avec l'optique, se fascine non seulement pour le travail de Lagrange, qu'il qualifie de « *poème scientifique par le Shakespeare des mathématiques* », mais également par cette similitude frappante entre l'approche de Fermat en optique et celle de Maupertuis et Euler - Lagrange en mécanique.

Quand il entre en scène en 1830, l'optique géométrique n'est plus qu'une approximation de l'optique ondulatoire de Huygens publiée en 1690, époque de Bernoulli. Il est désormais établi que le rayon de lumière, qui a prévalu dans l'optique géométrique, n'a plus qu'une signification fictive. Une onde de lumière sphérique se propage dans un espace à trois dimensions (3D) le long d'une infinité de rayons vecteurs tous pointant dans une direction perpendiculaire au front de l'onde sphérique. Si cette onde, dont la phase est constante, se propage dans un milieu homogène, les rayons en question sont rectilignes. Si par contre, la propagation a lieu dans un milieu inhomogène dans tout l'espace 3D, d'indice de réfraction  $n(x, y, z)$ , les fronts d'onde se déforment en se propageant et les rayons correspondants, tout en restant perpendiculaires au front d'onde en chaque point  $(x, y, z)$ , sont incurvés. **Il est absolument remarquable que Hamilton s'attarde sur cette surprenante analogie entre le temps minimum dans le cas de l'optique, qui est devenue depuis une optique ondulatoire, et l'action minimum dans le cas du point matériel.** Fallait-il attribuer une sorte « d'onde mécanique » au déplacement du point matériel? Hamilton ne pouvait le faire puisque toute la mécanique de l'époque étudiait les objets massifs auxquels il était hors de question d'attribuer une onde. La vision de Hamilton était prématurée. Ce qui était crucial

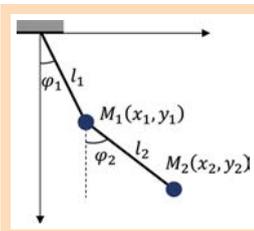


Figure 1. Double pendule illustrant le choix des variables indépendantes pour décrire son mouvement.

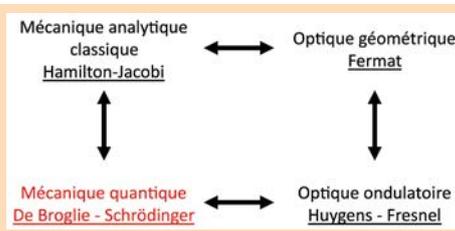


Figure 2. Diagramme montrant le couplage entre les différentes approches classiques et modernes dans l'établissement de la correspondance optique/mécanique.

dans le travail de Hamilton, c'était surtout son assertion que, tout comme l'optique géométrique était l'approximation de l'optique ondulatoire, la mécanique classique devait être une approximation d'une autre théorie qui deviendra un siècle plus tard la mécanique quantique [2], comme le synthétise le diagramme de la *figure 2*.

## L'approche hamiltonienne

En 1834, Hamilton prolonge le travail de Lagrange en appliquant au lagrangien  $L(q, \dot{q}, t)$  la transformation de Legendre des coordonnées généralisées [2,3]. Une telle transformation conduit à la relation,

$$H(q, p, t) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

où  $H(q, p, t)$  est le hamiltonien à partir duquel les équations du mouvement sont aisément extraites. La transformation de Legendre, ainsi que la prise en compte des coordonnées généralisées, permet à Hamilton de travailler dans l'espace des phases décrit par les positions  $\{q\}$  et les moments conjugués ou impulsions généralisées  $\{p\}$ , éliminant ainsi la variable  $\{\dot{q}\}$ . Lagrange opère quant à lui dans l'espace des configurations défini par  $\{q\}$  et  $\{\dot{q}\}$ . Il convient de rappeler que le long de la trajectoire physique le lagrangien exprime la différence entre deux réservoirs d'énergie que sont l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, une différence appelée à être optimisée pour une action moindre. Le hamiltonien exprime le long de la même trajectoire physique tout simplement l'énergie totale. Si la variable explicite  $t$  disparaît de la relation (2), le lagrangien tout comme le hamiltonien ne dépendent plus explicitement du temps, et l'énergie totale est conservée. C'est ce cas qui nous intéressera plus loin.

La *figure 3* résume sous forme d'un diagramme le cheminement et les étapes conduisant à l'approche de Hamilton suivie de l'étape cruciale établissant l'équation de Hamilton - Jacobi avec comme point d'orgue la correspondance effective entre optique ondulatoire et mécanique. Sans rentrer dans des considérations théoriques élaborées, mais en y adjoignant quelques relations mathématiques clés, nous décrivons ci-dessous les étapes ultimes qui ont conduit à l'établissement de cette correspondance.

## L'équation de Hamilton - Jacobi : de la mécanique classique à la « mécanique ondulatoire »

Le triomphe de l'idée de Hamilton se trouve dans la façon originale de traiter le principe de moindre action. Telle que la définit Maupertuis, et la développent Euler et Lagrange, l'opération consiste à minimiser l'action  $S$  entre deux points A et B. La trajectoire part d'un point A fixé, de coordonnées  $(q_A, t_A)$ , et aboutit au point B connu de coordonnées  $(q_B, t_B)$ . Dans ce cadre une seule trajectoire correspond au mouvement réel, celle pour laquelle  $S$  est minimum. Mais Hamilton envisage l'action sous un autre aspect. Le point de départ reste déterminé par  $(q_A, t_A)$  mais l'instant ultérieur  $t_B$

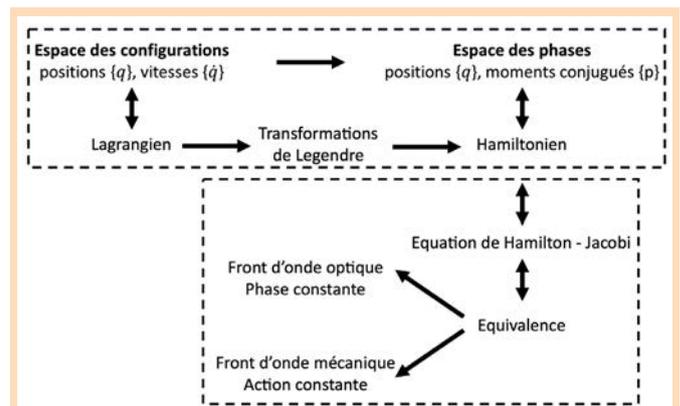


Figure 3. Diagramme illustrant les principales étapes dans le traitement du principe de moindre action.

est remplacé par un temps arbitraire  $t$ , où le système passe par des positions différentes, toutes satisfaisant à la même action. Dans ce cas, les valeurs  $(q_B, t_B)$  deviennent des variables  $(q, t)$  et l'action s'écrit,

$$S(q, t; q_A, t_A) = \int_{t_A}^t L(q, \dot{q}, t) dt \quad (3)$$

Les relations (2) et (3) conduisent à,

$$\frac{dS}{dt} = L = p \cdot \dot{q} - H \quad (4)$$

Par ailleurs la dérivée totale par rapport au temps de l'action  $S(q, t; q_A, t_A)$  donne,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (5)$$

En acceptant (sans démonstration) que la dérivée partielle de l'action par rapport à la coordonnée généralisée  $q$  est égale à l'impulsion généralisée correspondante ( $\partial S / \partial q = p$ ), les égalités (4) et (5) donnent,

$$\frac{dS}{dt} = -H(q, p, t) \quad (6)$$

Ce qui nous intéresse pour la suite de l'histoire du principe de moindre action c'est bien évidemment le cas d'un système conservatif, pour lequel  $H$  est explicitement indépendant du temps. Cette fonction s'identifie par conséquent à l'énergie totale  $E$  qui se conserve. De là, on extrait la solution simple de l'équation de Hamilton - Jacobi qui est donnée par,

$$S(q, t) = S_0(q) - Et \quad (7)$$

C'est dans cette équation que se trouve la proposition inspirée de Hamilton consistant à trouver un équivalent optique à la mécanique. Comparons cette expression à celle d'un front d'onde de l'optique ondulatoire dont la phase constante s'exprime par,

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t \quad (8)$$

où  $\mathbf{k} (k = \frac{2\pi}{\lambda})$  est le vecteur d'onde et  $\omega$  la fréquence angulaire.

Tout comme pour la propagation d'une onde optique, l'expression (7) possède une interprétation géométrique intéressante. Remarquons que si  $\partial S / \partial q = p$  mentionnée (sans démonstration plus haut), alors,

$$\frac{\partial S_0(q)}{\partial q} = p \quad (9)$$

Si on considère dans l'espace des coordonnées généralisées  $q$ , la surface  $S_0(q)$  constante, le vecteur normal<sup>1</sup> à une telle surface est simplement le gradient

$$\vec{\nabla}S_0(q) = \vec{p} \quad (10)$$

lequel dans le traitement de Hamilton – Jacobi n'est autre que le vecteur impulsion. Ainsi, la trajectoire mécanique s'apparente à une onde dont le front est constitué par l'action, constante en tout point de ce front et se propageant le long de rayons (impulsions  $p$ ) orthogonaux au front. Nous verrons plus loin comment ce traitement aboutit tout naturellement à l'établissement de l'équation de Schrödinger pour un point matériel de masse non nulle comme l'électron, après que Louis de Broglie a clairement prédit sa nature ondulatoire. Le diagramme de la *figure 3* complète la structure formelle de l'approche Hamilton – Jacobi. Partant du point  $(q_A, t_A)$ , considéré comme la source du mouvement. Les positions à un instant  $t$  ultérieur, satisfaisant la condition d'optimalité de l'action, décrivent une courbe d'action constante  $S(q, t)$ . La *figure 4* illustre la correspondance avec l'optique de la propagation d'un front d'action durant le mouvement, où à un instant antérieur,  $t - dt$ , l'action est  $S - dS$  et à un instant ultérieur,  $t + dt$  l'action est  $S + dS$ .

En résumé, l'onde optique se propageant le long de rayons orthogonaux (rayons fictifs de l'optique géométrique) au front d'onde de phase constante, trouvera dans un système mécanique conservatif son équivalent dans la propagation d'une « onde mécanique », constituée de front d'onde d'action constante, se propageant le long de rayons orthogonaux au front d'onde représentés par les vecteurs impulsions. **L'action est donc la phase de l'onde mécanique. C'est l'aboutissement du travail monumental de Hamilton.** Nous reviendrons sur ce point quand il s'agira de voir comment Schrödinger établit son équation.

## L'avènement de la mécanique quantique : l'onde de matière

En se restreignant à l'ère de la science quantitative moderne, démarré avec Galilée, on peut noter qu'aussi bien la mécanique de Newton que l'électrodynamique de Maxwell, ou bien encore la relativité restreinte d'Einstein, sont des théories du continu. La nature discrète de la matière a fait son apparition au 19<sup>e</sup> siècle avec la chimie, mais c'est au cours du 20<sup>e</sup> siècle que la science prend un tournant radical avec l'émergence de la nature définitivement discontinue de l'énergie et de la matière. Une telle rupture vient de la physique, encore une fois par l'intermédiaire de l'optique, et s'étend ensuite à toute la chimie pour embrasser la biologie.

### Max Planck

En 1860, Gustav Kirchhoff pose, sous forme de défi, le problème de l'émission du corps noir en le dépouillant de tout artéfact de type volume, forme ou même nature de la matière composant la cavité

<sup>1</sup> Rappelons que si une équation de surface s'exprime par  $F(x, y) = 0$ , dans laquelle  $y = \phi(x)$ , alors  $dF/dx = \partial F/\partial x + \partial F/\partial y \cdot \partial \phi/\partial x = 0$ . Ceci équivaut au produit scalaire entre deux vecteurs perpendiculaires de composantes  $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y)$  et  $(1, \partial \phi/\partial x)$  le deuxième vecteur étant tangent à la surface. Ainsi le vecteur de composantes  $(\partial F/\partial x, \partial F/\partial y)$  exprime le gradient  $\vec{\nabla}F$ .

de ce corps noir. Il montre que la densité spectrale ne dépend que de deux variables que sont la fréquence de l'onde émise et la température du corps noir, sans pour autant réussir à déterminer la fonction qui lie ces deux variables. Il déclare que la détermination de cette fonction universelle constitue une tâche ultime vers la compréhension de la structure intime de la matière. En établissant 40 ans après cette conjecture la fonction en question, Max Planck met en évidence l'existence du quantum d'action  $h$ , appelée également constante de Planck, qui gouvernera la physique quantique à partir de 1900. L'action, définie par Maupertuis, survit à cette révolution conceptuelle en atteignant la valeur ultime et universelle  $h = 6,6262 \times 10^{-34}$  J s, consacrant définitivement la discontinuité de l'énergie et de la matière.

### Louis De Broglie

En étudiant le concept de photon qu'Einstein met en avant pour expliquer l'effet photoélectrique, confirmant ainsi l'idée novatrice de Planck, De Broglie a été frappé par le contenu de la relation,

$$E = h\nu \quad (11)$$

qui découle en réalité des deux approches de Planck et Einstein, même si pour le premier ce n'était qu'un expédient provisoire en attendant une meilleure théorie. Dans cette relation la fréquence est issue de la physique classique, elle peut donc prendre toutes les valeurs possibles. **C'est donc le quantum d'action  $h$ , propriété fondatrice de la nouvelle physique quantique, qui donnera à l'énergie son caractère discret puisque c'est désormais la quantité minimale d'énergie que la matière peut échanger, entre autres, avec le rayonnement.** De Broglie remarque qu'une théorie purement corpusculaire de la matière ne contient aucun élément permettant de définir une fréquence. Il conclut à la nécessité de renverser la dualité onde – corpuscule pour la matière. Cette observation le conduit à affirmer : « *Après une longue méditation et réflexion solitaire, j'ai subitement eu l'idée durant l'année 1923, que la découverte faite par Einstein en 1905 doit être généralisée par extension à toute particule de matière et singulièrement l'électron* ». L'énergie, comme propriété fondatrice de toute la physique, s'exprime désormais par la relation (11), aussi bien pour le photon que pour n'importe quelle particule matérielle. L'idée de l'onde, associée à toute particule de matière, amène De Broglie à établir le lien entre la longueur d'onde (concept ondulatoire) et la quantité de mouvement (concept mécanique), le lien étant le quantum d'action comme pour la relation (11).

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (12)$$

Ce parallélisme extraordinairement simple entre l'approche ondulatoire, via la longueur d'onde  $\lambda$ , et l'approche corpusculaire, via la quantité de mouvement, fait des deux relations (11) et (12) les ingrédients majeurs de la mécanique quantique. La découverte de De Broglie conduit directement au lien entre les approches de Fermat et de Maupertuis, qui était le fondement même de la pensée hamiltonienne.

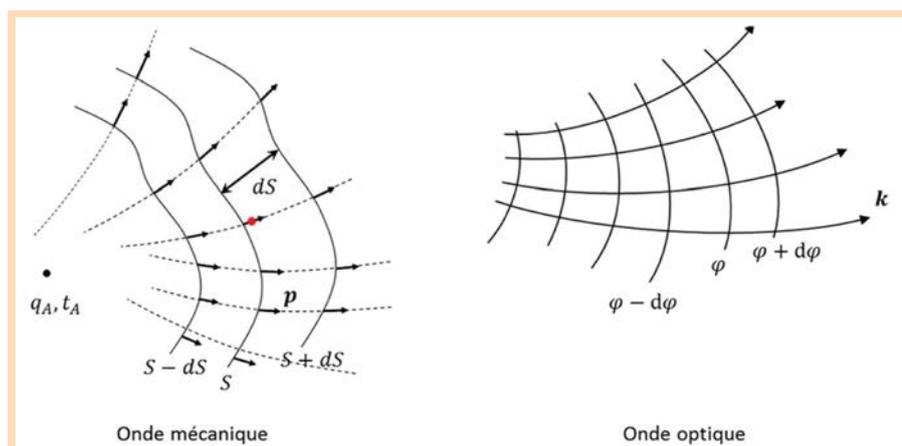


Figure 4. Illustration des fronts d'onde d'action mécanique et d'optique ondulatoire. Le point rouge matérialise la présence de la particule sur le front de son « onde porteuse ».

Elles se résument comme suit,

$$\text{Fermat} \rightarrow \int_A^B \eta dl \quad \text{Maupertuis} \rightarrow \int_A^B p dl \quad (13)$$

En considérant un mouvement dans lequel l'énergie se conserve, le lien entre l'indice de réfraction  $\eta$  et la vitesse de l'onde associée  $u$  ( $\eta = \frac{c}{u} = \frac{c}{\lambda v}$ ) donnée plus haut, ainsi que les relations (11) et (12), conduisent à la reformulation de la relation de Fermat donnée par la relation (13),

$$\text{Fermat} \rightarrow \frac{c}{E} \int_A^B p dl \quad (14)$$

Laquelle, à la constante  $c/E$  près, est celle donnée par Maupertuis. De Broglie arrive à redéfinir, grâce à ces deux relations, la stabilité de l'atome de Bohr. En effet, comme l'électron suit une trajectoire fermée autour du noyau, il est naturel de supposer l'uniformité de la phase de l'onde associée le long de cette trajectoire. Ainsi De Broglie écrit,

$$\oint \frac{dl}{\lambda} = \oint \frac{p}{h} dl = n \quad (15)$$

où  $n$  est l'entier naturel de quantification, autrement dit celle-ci s'exprime par,

$$\oint p dl = nh \quad (16)$$

La découverte par De Broglie du lien entre la quantité de mouvement d'une particule et la longueur d'onde associée  $\lambda$ , *de facto*, établi un lien équivalent entre les lois de la mécanique et celles de l'optique géométrique. Cependant, la limite de validité de cette dernière est claire dès lors qu'il s'agit d'interpréter les lois d'interférence et de diffraction, la reléguant au rang d'approximation de l'optique ondulatoire. Par un parallélisme évident, la mécanique classique devient également l'approximation d'une mécanique plus vaste selon les termes de Louis de Broglie qui fait par ailleurs l'analogie suivante: « *La nouvelle dynamique du point matériel (incluant le photon d'Einstein) est à l'ancienne (dynamique classique) ce que l'optique ondulatoire est à l'optique géométrique* ».

## Erwin Schrödinger

Au moment où Schrödinger prend le sujet en main, Le concept de « masse ponctuelle », encore hypothétique à l'époque de Hamilton, s'affirme grâce à la mise en évidence des constituants ultimes de l'atome. La réalité physique de l'onde électronique de De Broglie ne faisant plus de doute, il revient à Schrödinger d'établir en 1926 l'équation d'onde de la mécanique quantique [4]. Cette équation allait résoudre une crise majeure issue de la structure planétaire de l'atome de Bohr qui durait depuis 1913 [5]. L'idée de base de la nouvelle physique est que le trajet individuel de la masse ponctuelle, représentant l'électron, perd sa signification physique et devient aussi fictif que le rayon optique de Fermat [6].

# Plateforme OSICS

Créez vos bancs de test



avec nos modules OSICS

Nouveaux Lasers  
TLS-AG  
Bandes C & L  
étendues



Accordabilité bande C  
1527.40–1568.57 nm

Accordabilité bande L  
1568.77–1610.06 nm

Puissance laser  
+6 à +13.5 dBm

**Yenista**  
OPTICS

Tél. : +33 (0)2 96 48 37 16

sales-emea@yenista.com

www.yenista.com

### Deux voies mènent à l'équation de la mécanique quantique

Le point central qui a guidé Schrödinger, outre la considération de la nouvelle loi d'Einstein, liant l'énergie à la fréquence par la constante de Planck, et la relation de De Broglie, est celui de trouver la vitesse de propagation de l'action qui trouve son équivalent dans la vitesse de phase dans l'optique ondulatoire. C'est encore une fois le principe de moindre action qui va l'y aider et cela de deux façons quasi-indépendantes.

#### À partir de la théorie d'Hamilton-Jacobi

En utilisant la loi de conservation de l'énergie nous savons que,

$$\frac{p^2}{2m} = E - V(x, y, z) \quad (17)$$

qui n'est autre que l'équation de Hamilton - Jacobi, obtenue en tenant compte de (10).

$$\frac{(\nabla S_0)^2}{2m} = E - V(x, y, z) \quad (18)$$

En considérant la relation (6), dans laquelle on identifie la fonction de Hamilton avec l'énergie totale, et le fait que  $p = dS/dq$ , la vitesse de phase  $dq/dt$  de l'onde constituée par l'action en découle directement,

$$u(E, x, y, z) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{\sqrt{2m[E-V(x, y, z)]}} \quad (19)$$

La dépendance en énergie de cette vitesse dans un milieu inhomogène souligne le caractère dispersif du milieu. Selon les singularités locales du potentiel, l'onde matérielle peut se déformer comme schématisé à la figure 4. C'est de la relation (19) que Schrödinger a besoin pour construire son équation.

#### À partir de la correspondance Fermat - Maupertuis et de la dualité onde/corpuscule

Il y a une deuxième façon d'obtenir la vitesse d'action constante, ou vitesse de phase de l'onde « mécanique », paradoxalement sans faire appel au travail de Hamilton - Jacobi, mais ayant néanmoins à l'esprit la correspondance Fermat - Maupertuis et la dualité onde/corpuscule. Reprenons deux équations majeures discutées dans la première partie [1]. Elles mettent le parallèle entre le principe de Maupertuis donné par,

$$\delta \left( \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{2m[E-V(x, y, z)]} dl \right) = 0 \quad (20)$$

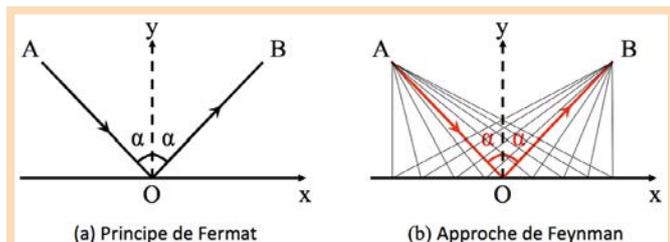


Figure 5. Comparaison entre l'approche classique de Fermat (a) et celle de Feynman (b) dans le traitement de la réflexion de la lumière. Sur la figure (b) est reproduit en rouge le chemin de Fermat à titre de comparaison.

qui est formellement identique au principe de Fermat de l'optique géométrique dans un milieu inhomogène donné par,

$$\delta \left( \int_{x_a}^{x_b} \frac{dl}{u(x, y, z)} \right) = 0 \quad (21)$$

Posons,

$$u(E, x, y, z) = \frac{f(E)}{\sqrt{2m[E-V(x, y, z)]}} \quad (22)$$

où  $f(E)$  est une fonction de l'énergie totale seulement, ne dépendant pas de l'espace. Cette fonction  $f(E)$  est nécessaire car elle résulte du rapport formel entre la quantité de mouvement apparaissant dans l'équation (20) et l'inverse de la vitesse  $u(E, x, y, z)$  apparaissant dans la relation (21). La vitesse sera dans l'optique ondulatoire la vitesse de phase, à distinguer de la vitesse de la particule (électron) qui est extraite de la conservation de l'énergie mécanique,

$$v(E, x, y, z) = \frac{1}{m} \sqrt{2m[E-V(x, y, z)]} \quad (23)$$

Dans la mécanique quantique qui se construit, la relation d'Einstein  $E = h\nu$  montre bien le lien avec la fréquence de l'onde lumineuse. Pour trouver la fonction  $f(E)$  il faut établir le lien entre les deux vitesses données par les relations (22) et (23). Pour une particule matérielle, il convient de remarquer que la vitesse  $v = v_g$ , où  $v_g$  représente la vitesse du paquet d'onde associé à la particule. Sachant que la vitesse de phase est égale à  $\omega/k$  et en utilisant la relation d'Einstein,  $E = \hbar\omega$ , la vitesse de groupe est donnée par,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{d\left(\frac{E}{\hbar v}\right)} \quad (24)$$

Les relations (22) - (24) conduisent directement à la condition  $f(E) = E$  permettant de déterminer complètement la vitesse de phase de l'onde associée à l'électron se mouvant dans un champ de potentiel  $V(x, y, z)$  et d'énergie totale,

$$E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(x, y, z) \quad (25)$$

Remarquons l'identité des relations (19) et (22) dans laquelle  $f(E) = E$ .

#### L'équation de Schrödinger

La vitesse de phase de l'onde associée, la relation d'Einstein  $E = \hbar\omega$  et enfin la relation de De Broglie, sont les ingrédients nécessaires et suffisants qui permettent à Schrödinger de transformer l'équation d'onde classique, établie en optique ondulatoire, pour une fonction d'onde  $\Psi(x, y, z, t)$ ,

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (26)$$

dans laquelle  $\Psi(x, y, z, t)$  s'exprime sous sa forme complexe par,

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{i\omega t} \quad (27)$$

et dans laquelle  $\omega$  doit être remplacé par  $E/\hbar$ . En incluant dans la relation (26) la vitesse de phase donnée par les relations (19) ou (22), Schrödinger arrive à la forme indépendante du temps de son équation d'onde de matière,

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{\hbar^2} (E-V) \psi = 0 \quad (28)$$

En introduisant la relation (27) dans l'équation (28), l'équation de Schrödinger dépendant du temps découle immédiatement<sup>2</sup>.

## Richard Feynman

En 1942 Feynman propose une nouvelle théorie basée sur le caractère corpusculaire aussi bien de la lumière que de la matière. Dans cette nouvelle formulation, Feynman remet en « selle » deux principes fondamentaux que sont celui de moindre action et celui de superposition pour établir que le résultat d'une expérience est la somme de plusieurs processus ayant lieu chacun avec une probabilité donnée. Autrement dit, chaque événement ou processus sera caractérisé par un vecteur dans le plan complexe et le résultat final sera simplement la résultante (ou somme) vectorielle dont le carré définira la probabilité d'occurrence du phénomène dans sa globalité.

Afin de rester dans le cadre du présent article, l'approche de Feynman est restreinte à l'exemple de la réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir plan, qui aboutira à une élégante comparaison avec l'approche classique de Fermat, illustrée à la *figure 5 (a)*. Feynman considère comme Fermat le photon qui suit un trajet donné entre deux points A et B. Il introduit l'idée, complètement inattendue, selon laquelle le photon peut suivre autant de trajets qu'il est possible entre les deux points A et B. La *figure 5 (b)* illustre cette idée et la compare à la trajectoire unique de Fermat. Le phénomène de réflexion consiste donc en une multitude (infinité) de possibilités, chacune ayant lieu avec une certaine probabilité.

Le principe de Fermat assure que seul un trajet du rayon lumineux est possible, celui qui respecte l'égalité des angles d'incidence et de réflexion comme, illustré par le trajet en rouge dans les deux *figures 5 (b)* et *6 (b)*. Feynman affirme que le photon qui quitte la source A empruntera tous les chemins possibles pourvu qu'ils arrivent au point B. Ces chemins peuvent être rectilignes ou courbes cela importe peu. D'où lui est venue cette idée pour le moins curieuse? Pour répondre à cette question, il est utile de rappeler les points d'ancrage sur lesquels Feynman a basé sa réflexion.

- 1) L'expérience des fentes d'Young, ou d'un réseau de diffraction, conduisant toutes aux figures d'interférence, laisse penser, contrairement à l'intuition, que le photon ou toute particule microscopique comme l'électron explore toutes les voies possibles.
- 2) Dans la définition de l'action « classique », le point de départ A et d'arrivée B sont fixés. C'est aussi le cas dans la démarche de Feynman. L'émission du photon au point A à l'instant  $t_A$  et sa détection au point B à l'instant  $t_B$  sont également fixées.

Il est instructif de mettre en parallèle le questionnement de Fermat et Feynman à 300 ans d'intervalle.

**Fermat:** en partant d'un point A, à l'instant  $t_A$ , quel chemin (unique) le rayon optique emprunte-t-il pour arriver au point B, à l'instant  $t_B$ , après réflexion sur une surface plane?

**Feynman:** après émission par la source A, à l'instant  $t_A$ , quelle probabilité est attachée à chaque chemin qui s'offre au photon d'arriver au détecteur B, à l'instant  $t_B$ , chacun subissant une réflexion?

La certitude de Fermat devient une simple probabilité chez Feynman. Une conclusion qui s'avérera aussi profonde que la remarque visionnaire de Hamilton à propos de la correspondance optique ondulatoire/mécanique. Dans cette nouvelle vision, toute la question pour Feynman était de définir le vecteur qui caractérise chaque événement (trajet) lui permettant d'appliquer à l'ensemble le principe de superposition, un principe extrêmement puissant en physique. L'idée de génie de

<sup>2</sup> L'association d'une onde unique à un électron libre a conduit à des difficultés soulevées par De Broglie, comme la relation entre la vitesse de la phase de l'onde et la vitesse de l'électron porté par cette onde, ainsi que la normalisation de la fonction d'onde censée tracer sa trajectoire. Toutes ces difficultés ont été levées par la considération du paquet d'ondes.

# Optatec



13<sup>ème</sup> Optatec

**Salon international  
des technologies,  
composants et  
systèmes optiques**

Composants optiques

Optomécanique/  
Optoélectronique

Fibre optique/  
Guides d'ondes  
lumineuses

Composants laser

Solutions systèmes  
de fabrication

07 - 09

JUIN 2016

FRANCFORT

[www.optatec-messe.de](http://www.optatec-messe.de)

**SCHALL**  
DES SALONS ADAPTÉS AUX MARCHÉS

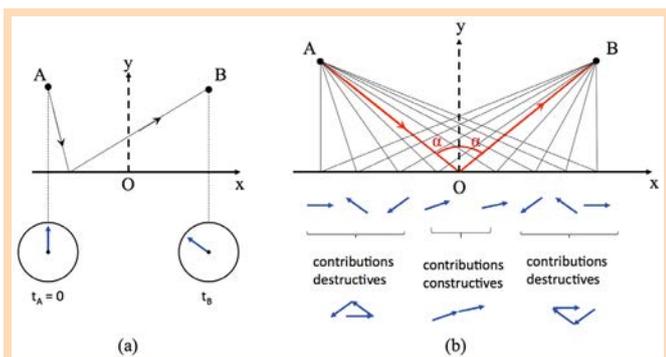


Figure 6. Traitement par Feynman du trajet du photon et de la mesure de sa durée par l'horloge quantique. En (a) un seul des trajets possibles est illustré. En (b) plusieurs trajets sont représentés avec leur traitement temporel en terme vectoriel.

Feynman trouve sa source dans le rôle de l'action classique telle qu'elle est définie par Maupertuis. Le résultat incroyable auquel Feynman arrive dans le cas de la réflexion est que la somme vectorielle de tous les trajets substantiellement éloignés du trajet de Fermat s'annule ou presque alors que pour les trajets très proches de celui de Fermat la somme vectorielle se renforce. Autrement dit, le chemin de Fermat correspond à celui de Feynman pour lequel la probabilité est maximum, proche de l'unité, caractérisé par un rapport des angles d'incidence et de réflexion également proche de l'unité.

### Approche de Feynman

Feynman déclare que «*la particule fait ce qu'il lui plaît. Elle emprunte le chemin et la direction qu'elle veut à la vitesse qu'elle veut*». Il caractérise un chemin par une horloge quantique dont l'aiguille est un vecteur qui tourne à une fréquence qu'il faut définir [7]. Pour le photon, ce sera la fréquence donnée par la relation d'Einstein,  $\nu = E/h$ . Pour l'électron, Feynman définit la fréquence de rotation de l'aiguille de l'horloge quantique par la relation  $\nu = (T - V)/h$ . Ainsi, qu'il s'agisse du photon ou de l'électron, le nombre total de révolutions de l'aiguille de l'horloge, caractérisant le trajet du point A (source) au point B (détecteur) est donné respectivement par  $ET/h$  et  $(T - V)t/h$ .<sup>3</sup> Il est trivial de voir que l'action au sens classique de Maupertuis réapparaît dans l'approche moderne de Feynman à travers le produit de l'énergie par le temps  $Et$ , respectivement  $(T - V)t$ . La figure 6 (a) illustre le cas d'un évènement pour lequel la durée est mesurée avec l'horloge quantique. On devine bien qu'à l'arrivée au détecteur B, l'aiguille de l'horloge a accompli un certain nombre de tours pour finalement se stabiliser à une position qui dépend de la longueur du trajet. Généralisant ce principe aux autres trajets possibles, Feynman arrive à une série de vecteurs, représentés

<sup>3</sup> Un examen de cette simple relation peut montrer un désaccord avec la relation de De Broglie si nous remplaçons  $T$  par  $p^2/mv$  et  $V = 0$  (électron libre) et substituons,  $\nu = v/\lambda = p/m\lambda$ . Cet apparent désaccord est dû à la différence entre la vitesse de phase de l'onde associée et la vitesse de groupe, vitesse de la particule ou du paquet d'ondes associé comme cela a été discuté plus haut et que Feynman a reconnu (R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw-Hill, New York, 1965, pp. 44-45).

simplement par les aiguilles (vecteurs) de l'horloge quantique, chacune avec sa propre position comme l'illustre la figure 6 (b). Il suffit alors de procéder à une somme vectorielle (principe de superposition) pour obtenir la résultante dont le carré représente la probabilité finale. La figure 7 (a) illustre le cas où plus de trajets sont pris en compte, en comparaison de ce que montre la figure 6 (b). Le but ici est de montrer un fait d'une surprenante élégance. Loin du centre où a lieu la réflexion de Fermat, les positions des vecteurs «aiguilles» forment une quasi-boucle, rendant leurs résultantes respectives proches de zéro. Seuls sont effectifs les trajets qui se rapprochent du trajet de Fermat pour lesquels les vecteurs forment une contribution constructive. La différence est que dans l'approche de Feynman, les trajets très proches de celui de Fermat, pour lesquels la différence d'action est inférieure à  $\hbar$ , ne peuvent être résolus expérimentalement.

Pour conclure avec l'approche simplifiée de Feynman, il est utile de se rappeler qu'un nombre complexe peut être représenté par un vecteur dans un plan  $xy$  comme le montre la figure 7 (b). La longueur du vecteur  $\vec{P}_j$  représente l'amplitude du nombre complexe, sa phase  $\varphi_j$  représente l'angle entre le vecteur et l'axe  $Ox$ . Ainsi selon le postulat de Feynman, chaque vecteur  $\vec{P}_j$  a comme phase  $\varphi_j = Et/\hbar = S_j/\hbar$ . On voit donc bien que c'est la différence de phase entre les chemins qui décidera du résultat final, tel un processus d'interférences. Le lien avec l'analyse de Schrödinger est direct si on considère que chaque vecteur  $\vec{P}_j$  représente la fonction d'onde du processus  $j$  qui s'écrit,

$$\Psi_j = \Psi_{j0}(x, y, z)e^{iS_j/\hbar}$$

Feynman montre que dans la limite  $S_j \gg \hbar$ , on retrouve le monde classique.

### Conclusion générale

Au terme de cette description de l'histoire du principe de moindre action, il est utile de préciser quelques aspects liés aux relations entre principes – lois et théories. La tâche de toute science consiste à «voir» au-delà de ce qui est visible dans l'immédiat afin de pénétrer un monde encore invisible, permettant en retour de replacer le visible dans un contexte plus large.

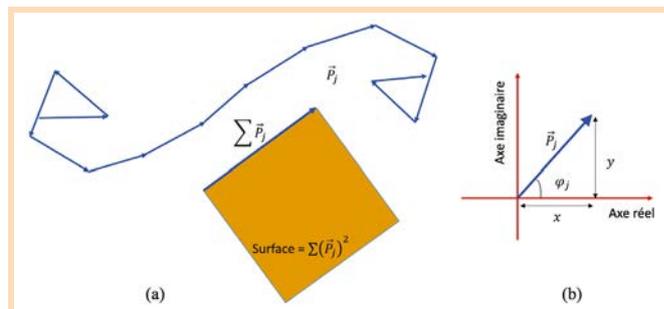


Figure 7. La procédure de somme vectorielle appliquée à plusieurs trajets avec comme résultat le vecteur global et son carré illustrant le groupe de trajets les plus probables, centré sur le trajet unique de Fermat. La figure (b) représente un vecteur sur le plan complexe que Feynman ramène à la fonction d'onde.

Le principe de moindre action procède semble-t-il de cette démarche. Il prend sa source dans le comportement de la lumière, qui relève selon Fermat d'un principe d'économie naturelle. Parmi les successeurs de Fermat, Maupertuis postule que ce principe d'économie naturelle doit s'appliquer également aux objets obéissant à la mécanique. C'est là un des premiers critères unificateurs. Inscire logiquement dans une même structure simple et esthétique, et avant toute observation, des faits séparés. Maupertuis y voit l'harmonie de l'acte divin dans le fonctionnement du Monde. En dépouillant le principe de son contenu mystique, Euler et Lagrange lui donnent une base formelle ouvrant la voie à une impressionnante richesse intellectuelle.

Il appartiendra à la théorie prédictive hamiltonienne de lever un coin du voile d'un monde encore invisible, donc à venir. Le remplacement du principe de Fermat - Maupertuis dans un contexte plus large ne tardera pas à voir le jour avec sa généralisation à d'autres théories qui se sont construites indépendamment mais que le principe de moindre action a redéfinies avec une élégance toute particulière. Citons la théorie de la relativité et celle de l'électromagnétisme. La force du principe, et son ancrage dans la réflexion scientifique, sont devenus incontestables dès lors que les lois d'invariance et de conservation en ont découlé. Citons l'énergie et la translation dans le temps, l'impulsion et la translation dans l'espace et enfin le moment cinétique et les rotations. On voit là se dessiner une seule et unique structure conceptuelle dans laquelle lois, principes et hypothèses se retrouvent imbriqués.

On peut citer au moins deux exemples: le lien entre la masse et l'énergie, et la dualité onde-corpuscule aussi bien pour les ondes électromagnétiques que pour la matière.

La portée du principe de moindre action va au-delà de la science. Il n'a depuis sa formulation jamais cessé de stimuler des débats philosophiques parmi lesquels sa relation à la quête d'absolu. Celui qui a résumé le mieux cette relation est sans doute Max Planck qu'il convient de citer: « *Le Monde extérieur est quelque chose d'indépendant de l'Homme, quelque chose d'absolu, et la quête des lois qui s'appliquent à cet absolu m'apparaît comme la plus sublime des tâches de ma vie* ».

#### RÉFÉRENCES

- [1] A. Mesli, Genèse et développement du principe de moindre action, première partie, *Photoniques* 80, 2016
- [2] Amiot et Marleau, *Mécanique classique II*, ScientificWork Place (SWP), Université Laval, Québec, Canada, 1998-2013
- [3] J.L. Basdevant, *Le principe de moindre action et les principes variationnels en physique* (Vuibert, 2010)
- [4] E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem, *Annalen Der Physik* 6, 32 (1926)
- [5] A. Pais, *Niels Bohr's Times: In physics, philosophy, and polity* (Clarendon Press/Oxford University Press, 1991)
- [6] E. Schrödinger, *The fundamental idea of wave mechanics*, discours Nobel
- [7] R. Feynman, *QED - The Strange Theory of Light and Matter* (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 1985)

PUBLI-RÉDACTIONNEL

## Micronora 2016: les technologies photoniques à l'honneur

**P**olyvalent, le salon international de micro-technologies et de la précision qui ouvrira ses portes du 27 au 30 septembre 2016 à Besançon (Franche-Comté) répond aux besoins de nombreux domaines industriels. De l'automobile à l'aéronautique en passant par le médical et l'électronique, les visiteurs y trouveront des solutions qui touchent aussi bien la conception que la fabrication et le contrôle des composants ou des ensembles de plus en plus miniaturisés. Plus de 800 exposants leur proposeront ainsi des solutions adaptées à des projets complexes. Des réalisations qui pour la plupart, ne pourraient pas être réalisées sans l'apport de technologies photoniques. Omniprésente au salon bison-tin, la mesure illustre parfaitement cette évolution avec des solutions avancées réalisées par des sociétés comme Physik Instrumente France. Ou Keyence qui a mis au point un système de mesure laser de cibles réfléchissantes pour EDF. Le laser sera d'ailleurs, présent sur de nombreux stands à Micronora 2016.



Polyvalente, la machine de soudage Select Fiber de Rofin utilise la technologie de lasers fibrés pulsés et sa table de travail dispose d'un système d'axe Beckhoff qui améliore la vitesse et la précision. (Source : Rofin)

Rofin Sinar propose plusieurs solutions de production polyvalentes dotées de lasers fibre, telles que Select Fiber, une machine de soudage ou le laser de marquage PowerLine F 20 VARIA. Ce dernier assure des marquages résistants à la corrosion, en couleur sur divers matériaux ou noir sur aluminium. Le Club Laser&Procédés sera de la fête avec un stand commun qui regroupera une quinzaine de sociétés et centres de transfert (ISP System, Precitec, Qiova, Optoprim, Trioptics, Lasea, ILS, Laser Cheval, GF Machining Solutions, Trotec, GM Prod, Alphanov, Irepa Laser, Alpha-Route des Lasers, Laser 2000). A ne pas manquer ici, les innovations dans le domaine de sources femto et picoseconde qui ouvrent de nouveaux champs d'application...

#### CONTACT

**MICRONORA**

Tél: +33 (0)3 81 52 17 35

[www.micronora.com](http://www.micronora.com)