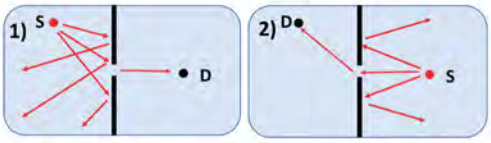
COMPRENDRE LE THÉORÈME DE RÉCIPROCITÉ OPTIQUE

Jean-Jacques GREFFET
Université Paris-Saclay, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Laboratoire Charles Fabry, Palaiseau, France
jean-jacques.greffet@institutoptique.fr



https://doi.org/10.1051/photon/202312056

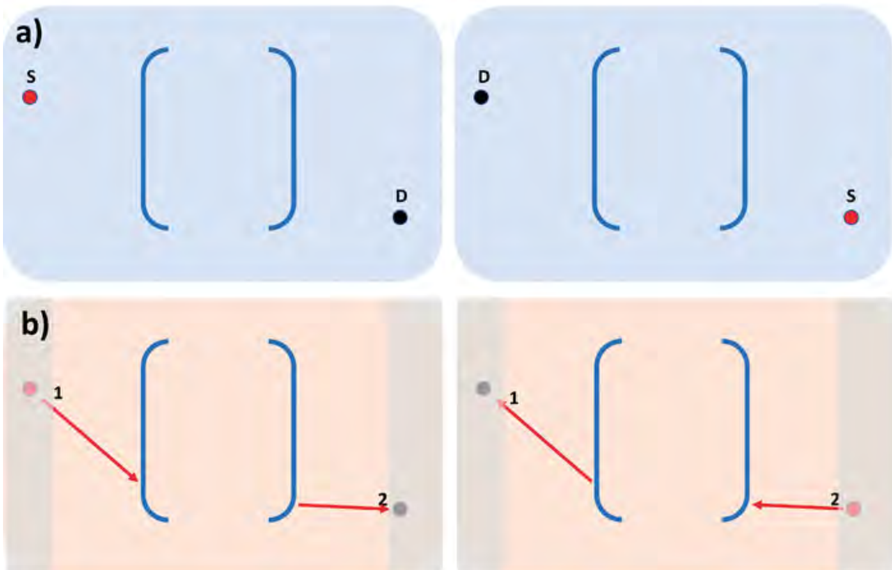
L'idée centrale du théorème de réciprocité est l'invariance du signal mesuré après permutation d'une source et d'un détecteur. L'article débute par un rappel des différentes formulations du théorème et de ses conditions de validité. Il discute ensuite brièvement les liens et différences avec le principe du retour inverse de la lumière et le renversement temporel. Il donne ensuite un aperçu des très nombreuses applications de ce théorème.

L'idée générale du théorème de réciprocité est l'égalité d'un signal lorsqu'un émetteur et un détecteur sont permutés (voir figure 1 a). Il s'agit donc de comparer deux situations dans lesquelles le système physique (interfaces, diffuseurs, etc) ne change pas mais pour lesquelles la source de rayonnement et l'endroit de la détection sont permutés. Ces deux situations sont appelées réciproques.

Il est possible d'utiliser la réciprocité sans faire explicitement référence à une source et un détecteur. En se plaçant comme le montre la figure 1b un peu en aval de l'émetteur et en amont du détecteur, la même égalité concerne la puissance transportée par un rayon allant d'un point **1** à un point **2** ou *vice versa*. C'est cette deuxième forme qui a été introduite sous forme de principe de réciprocité par Helmholtz et utilisée par Kirchhoff. Dans un article de 1860 consacré au lien entre l'absorption et l'émission par un corps chaud [1], Kirchhoff cite le principe de réciprocité de Helmholtz en ces termes :

"A ray of light proceeding from point **1** arrives at point **2** after suffering any number of refractions, reflections, etc. At point **1** let any two perpendicular planes a_1, b_1 be taken in the direction of the ray; and let the vibrations of the ray be divided into two parts, one in each of these

Figure 1 : Illustration de situations réciproques.
Fig.1 a) Une source S et un détecteur D sont permutés.
Fig.1 b) Un rayon issu de 1 et allant vers 2 et la situation réciproque dans le panneau de droite.



planes. Take similar planes a_2, b_2 in the ray at point **2**; then the following proposition may be demonstrated. If when the quantity i of light polarized in the plane a_1 proceeds from **1** in the direction of the given ray, the part k there of light polarized in a_2 arrives at **2**, then, conversely, if the quantity i of light polarized in a_2 proceeds from **2**, the same quantity of light k polarized in a_1 will arrive at **1**."

Un peu plus tard, Lord Rayleigh démontrera cette relation dans le cas des ondes acoustiques. Le théorème de réciprocité sera finalement établi par H.A. Lorentz pour les champs électromagnétiques à partir des équations de Maxwell sous une forme qui est rappelée dans l'encart. La forme établie dans l'équation (5) de l'encart correspond à la situation d'une source ponctuelle dipolaire $\mathbf{p}_1$ placée en $\mathbf{r}_1$ et d'un détecteur ponctuel placé en $\mathbf{r}_2$ qui mesure $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2)$ (et *vice versa*). L'équation (5) indique l'égalité des projections du champ sur le vecteur unitaire parallèle au courant source. Sous la forme (3), le théorème relie les champs émis par les sources.

RÉCIPROCITÉ ET RENVERSEMENT TEMPOREL

La représentation de la réciprocité en termes de rayons (Fig. 1 b) évoque immédiatement d'autres situations semblables : l'idée que si l'on voit, on est vu ou encore le renversement temporel d'une onde. Dans ce paragraphe, nous allons clarifier les liens et différences entre ces notions et le théorème de réciprocité.

L'égalité des signaux polarisés mesurés après permutation des sources et détecteurs donne une justification précise à l'énoncé « si je vois, je suis vu », il s'agit bien de réciprocité. En revanche, la question du lien entre la permutation des sources et le renversement temporel est plus subtile. S'il est vrai que lorsque source et détecteur sont permutés, le sens de propagation entre la source et le détecteur est inversé, les deux notions sont pourtant très différentes.

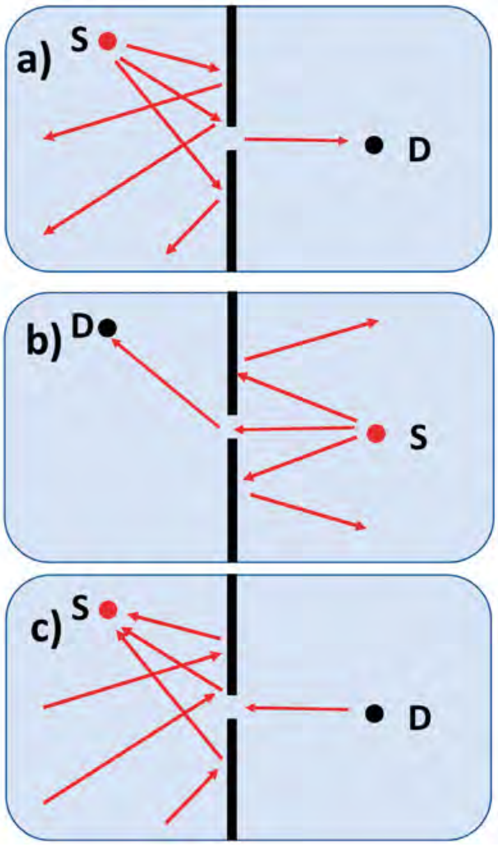


Figure 2. : a) Situation physique représentant une source S et un détecteur D de part et d'autre d'un écran percé par une ouverture,
b) situation réciproque,
c) situation renversée temporellement.

La figure 2 donne un premier aperçu de la différence entre la réciprocité et le renversement temporel. Nous considérons une source S et un détecteur D placés en deux points situés de part et d'autre d'un miroir parfaitement réfléchissant à l'exception d'une petite ouverture diffractante. Il apparait clairement que les champs créés dans ces deux situations réciproques (Fig. 2 a, b) sont très différents et ne correspondent pas du tout à une situation de type renversement temporel (Fig. 2 c). Pour autant, les signaux mesurés dans les deux cas réciproques a) et b) sont égaux.

La différence entre réciprocité et renversement temporel apparaît également en présence de pertes. Soulignons que l'obtention des relations de réciprocité présentées dans l'encart ne nécessite aucune hypothèse sur la présence ou l'absence de pertes dans le milieu. Ainsi, le théorème de réciprocité reste valable pour des permittivités et perméabilités complexes correspondant à des milieux présentant des pertes ou du gain. A contrario, si $E(x,t)$ est une solution des équations de Maxwell dans un milieu à pertes, alors, la solution après renversement temporel $E(x,-t)$ n'est pas solution. Supposons par exemple que l'on étudie la propagation d'une impulsion lumineuse se propageant de A vers B dans un milieu homogène à pertes. Son amplitude décroit exponentiellement au cours de la propagation. Si le changement de variable t en $-t$ est effectué, l'impulsion se propage de B vers A en ayant une amplitude croissante alors qu'elle décroit si l'on effectue l'expérience. Une discussion approfondie des liens entre renversement temporel et réciprocité se trouve dans les références [4,5].

APPLICATIONS

Calcul de champs émis

Le théorème de réciprocité peut permettre d'éviter de résoudre un problème de rayonnement et de lui substituer un problème de diffraction. Prenons l'exemple d'un dipôle placé en $z = d > 0$ près d'une interface séparant le vide ($z > 0$) d'un milieu d'indice n ($z < 0$). La question est de savoir quel est le champ émis par le dipôle dans le milieu d'indice n en champ lointain. En particulier, se pose la question de savoir comment cela dépend de la distance d et s'il est possible d'émettre des ondes au-delà de l'angle critique (Fig. 3 a) dans une direction caractérisée par un vecteur unitaire $\mathbf{u}$. Ces questions semblent relativement complexes. L'utilisation du théorème de réciprocité sous sa forme (5) •••

donne très facilement la réponse à ces questions comme le montre la figure 3b. Il suffit de calculer le champ électrique à l'emplacement de la source, donc en $z = d$, provenant d'un dipôle rejeté à l'infini dans une direction caractérisée par un vecteur unitaire u. Ce problème est le problème de la transmission d'une onde plane par une interface. En particulier, si l'onde se propage avec un angle à la normale supérieur à l'angle critique, l'onde subit une réflexion totale interne de sorte qu'il apparaît une onde évanescente au-dessus de l'interface avec une décroissance en $\exp(-\gamma z)$. Le théorème de réciprocité (Eq. (5)) indique que l'amplitude du champ émis par le dipôle est proportionnel au champ réciproque en $z = d$, c'est-à-dire à une onde évanescente qui décroit exponentiellement comme $\exp(-\gamma d)$.

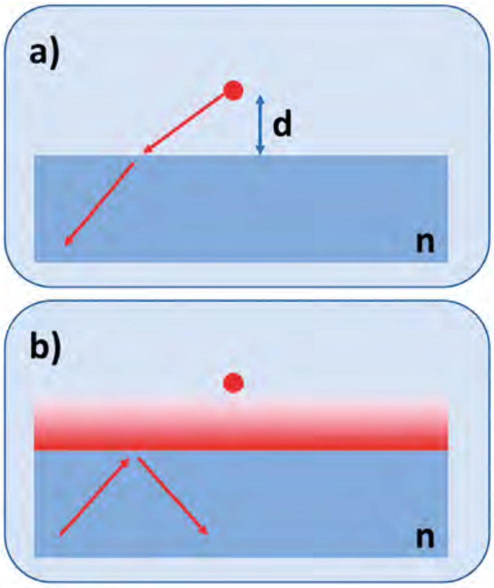


Figure 3 : a) Source S placée au-dessus d'une interface séparant un milieu d'indice n et de l'air. b) Afin d'estimer l'amplitude du champ rayonné vers le milieu d'indice élevé dans un angle supérieur à l'angle critique, il faut considérer une situation réciproque d'éclairement provenant de cette direction. L'onde "réciproque" subit une réflexion totale de sorte qu'une onde évanescente (représentée par un dégradé) existe dans l'air. Son amplitude à l'emplacement de la source fournit l'amplitude du champ rayonné.

Où placer une source à l'intérieur d'un système complexe ?

Considérons la question de l'emplacement d'une antenne sur un objet complexe tel qu'un avion sachant que l'on souhaite que l'émission se fasse vers l'avant pour communiquer avec l'aéroport vers lequel l'avion se dirige. Les ondes électromagnétiques émises par l'antenne vont induire des courants de surface sur la structure métallique de l'avion qui va se comporter comme une antenne secondaire. Ces rayonnements interfèrent de sorte qu'il est extrêmement difficile de prévoir où placer au mieux l'antenne. Ceci entraine soit de nombreux essais expérimentaux, soit de nombreux calculs. L'utilisation du théorème de réciprocité permet de simplifier le problème de façon drastique. Il suffit de simuler numériquement le champ électromagnétique autour de l'avion lorsqu'il est éclairé par une onde plane en provenance de l'avant. Un calcul unique va alors donner la distribution du champ sur toute la structure. Il apparaitra alors certains points où le champ électrique est maximal et a une certaine polarisation. C'est en ces points que l'on pourra placer une antenne filaire demi-onde orientée parallèlement au champ électrique. Le théorème de réciprocité garantit que l'antenne émettra dans la direction recherchée (mais ne dit rien de ce qui sera émis dans d'autres directions). Cet exemple illustre bien l'intérêt du théorème de réciprocité. Il faut retenir de cet exemple qu'un problème qui est difficile dans une situation peut être bien plus simple dans la situation réciproque.

L'utilisation du théorème de réciprocité permet de simplifier le problème de façon drastique. Il suffit de simuler numériquement le champ électromagnétique autour de l'avion lorsqu'il est éclairé par une onde plane en provenance de l'avant. Un calcul unique va alors donner la distribution du champ sur toute la structure.

Directivité d'une antenne

De nombreuses antennes sont directives, c'est-à-dire qu'elles concentrent la puissance émise dans un angle solide déterminé. C'est par exemple le cas des antennes paraboliques ou des antennes Yagi-Uda aussi appelées antennes râteau qui étaient utilisées pour la TV hertzienne. Ces antennes sont directives à la fois en émission et en réception dans les mêmes directions. Cette propriété peut se déduire du théorème de réciprocité.

Propriétés de la matrice de diffusion

Le théorème de réciprocité impose des propriétés aux facteurs de Fresnel et plus généralement, à la matrice de diffusion de tout objet constitué de matériaux ayant des tenseurs de permittivité et perméabilité symétriques. Une démonstration générale est présentée dans la référence [3]. Le cas le plus simple est celui d'une interface simple séparant deux milieux. En appliquant le théorème de réciprocité à une source et un détecteur se trouvant de part et d'autre de l'interface, il apparait clairement que les facteurs de transmission T_{12} de 1 vers 2 et T_{21} de 2 vers 1 doivent être égaux. De façon plus générale, lorsque l'on considère la matrice de diffusion

S d'un objet (qui relie les amplitudes des champs entrants à celles des champs sortants) ou la BSDF (bidirectional scattering distribution function qui relient les luminances entrantes aux luminances sortantes) elles doivent nécessairement satisfaire à une propriété de réciprocité :

$S(\boldsymbol{u}_{inc}, \boldsymbol{u}_d) = S(-\boldsymbol{u}_d, -\boldsymbol{u}_{inc})$;
$BSDF(\boldsymbol{u}_{inc}, \boldsymbol{u}_d) = \mathrm{BDSF}(-\boldsymbol{u}_d, -\boldsymbol{u}_{inc})$.

Propriété du tenseur de Green

Le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega})$ rayonné par une densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega})$ dans un volume V est relié linéairement à la densité de courant. Le champ n'étant pas nécessairement colinéaire à la densité de courant, leurs expressions sont reliées par une matrice qui représente un tenseur appelé tenseur de Green. La forme la plus générale est alors donnée par :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\boldsymbol{\omega}) = i\omega\mu_0 \int \overleftrightarrow{G}(\mathrm{r},\mathrm{r}')\, \mathbf{j}(\mathbf{r}',\omega) d^3\mathrm{r}',$$

où $G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ est l'élément ij du tenseur de Green. En appliquant la forme (5) de l'encart, on obtient immédiatement une propriété du tenseur de Green :

$$G_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_{ji}(\mathbf{r}',\mathbf{r}).$$

La forme moderne du théorème de réciprocité s'écrit en considérant un même système physique décrit par une permittivité et une perméabilité linéaire en régime monochromatique dans lequel sont placés des courants $\mathbf{J}_1$ qui créent un champ $\mathbf{E}_1$ dans la situation 1, des courants $\mathbf{J}_2$ qui créent un champ $\mathbf{E}_2$ dans la situation 2. En combinant les équations de Maxwell écrites pour les deux situations [2, 3], on obtient la relation :

$$\nabla.(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1)=i\omega(\mathbf{B}_1.\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1.\mathrm{B}_2)-i\omega(\mathbf{D}_1.\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1\leq.\mathbf{D}_2)+\mathbf{J}_1.\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1.\mathbf{J}_2. \quad (1)$$

Dans cette écriture, D et H prennent en compte respectivement la polarisation et l'aimantation induites dans la matière. Les sources externes sont décrites par J. Dans l'hypothèse où les tenseurs de permittivité ε_{ij} et de perméabilité μ_{ij} sont symétriques, les deux premiers termes du membre de droite sont nuls de sorte que la relation devient le théorème de réciprocité :

$$\nabla.(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1)=\mathbf{J}_1.\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1.\mathbf{J}_2. \quad (2)$$

En l'absence de courants sources à l'intérieur d'un volume V, le théorème de Green-Ostrogradski appliqué à ce volume conduit à une intégrale sur la surface S qui l'entoure :

$$\oiint_S(\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2-\mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1).d\mathbf{S}=0 \quad (3)$$

En supposant maintenant que les courants sources sont non nuls à l'intérieur d'un volume V et nuls à l'extérieur, une intégration sur un volume V' incluant V et dont la surface est rejetée à l'infini donne [3, 4] :

$$\int \mathbf{J}_1.\mathbf{E}_2 d^3\mathrm{r} = \int \mathbf{J}_2.\mathbf{E}_1 d^3\mathrm{r}, \quad (4)$$

car l'intégrale de surface (3) est nulle dans ce cas. Pour le cas particulier de deux sources ponctuelles dipolaires $J_1(r)=-i\omega p_1\delta(r-r_1)$ et $J_2(r)=-i\omega p_2\delta(r-r_2)$, cette relation se simplifie :

$$\mathbf{P}_1.\mathbf{E}_2(\mathrm{r}_1)=\mathbf{P}_2.\mathbf{E}_1(\mathrm{r}_2). \quad (5)$$

Cette égalité montre bien le rôle de la polarisation ainsi que la permutation des sources et détecteur.

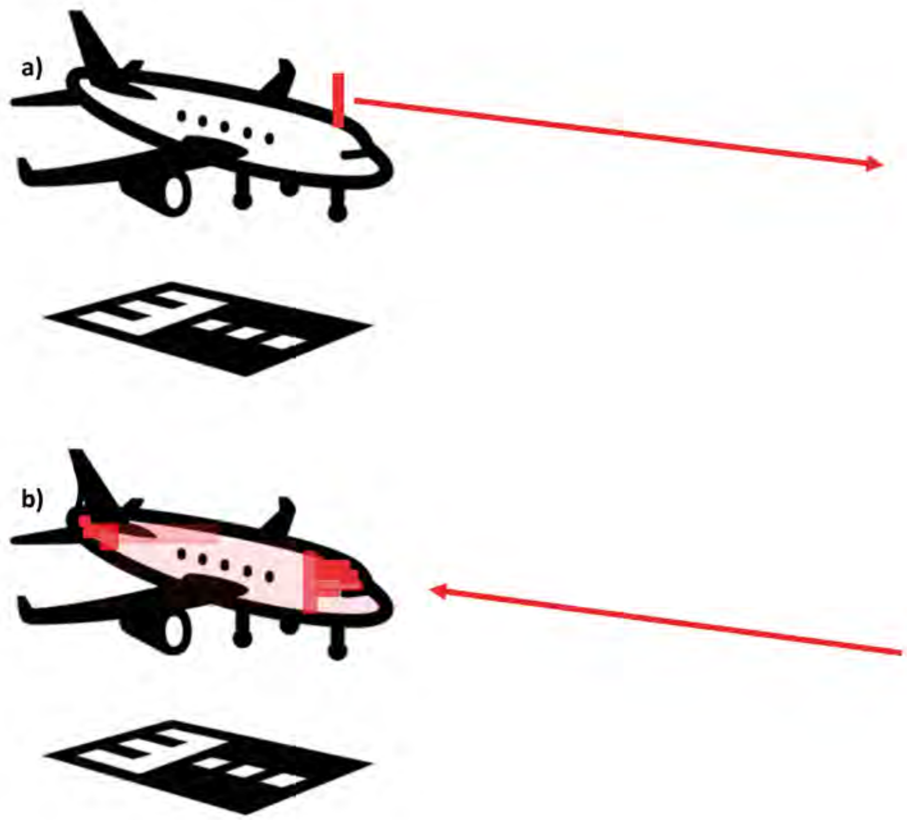


Figure 4. : Un calcul direct de l'émission d'une antenne dans une structure complexe conduit à de multiples essais pour optimiser l'émission dans une direction donnée (l'avant sur le schéma). En éclairant depuis cette direction, (fig 4 b), la distribution de champ sur l'avion indiquera les points de forte amplitude où il convient de placer l'antenne.

Test de précision d'un calcul numérique

Lorsque l'on utilise une méthode numérique pour calculer des champs électromagnétiques, il est nécessaire d'évaluer la précision des calculs. La vérification de la conservation de l'énergie peut fournir une estimation de la précision du calcul. De la même façon, il est possible de vérifier la précision avec laquelle le calcul satisfait au théorème de réciprocité.

Loi de Kirchhoff

Pour finir, nous revenons aux travaux de Kirchhoff qui a utilisé ce qu'il appelait le principe de réciprocité de Helmholtz dans sa démonstration de l'égalité entre l'absorptivité et l'émissivité d'un corps. Rappelons que la luminance émise par un corps chaud est donnée par le produit de la luminance de corps noir multipliée par un facteur inférieur ou égal à 1 appelé émissivité. Nous allons donner ici un argument qualitatif qui permet de comprendre l'origine de cette égalité et le rôle du principe de réciprocité. En supposant que le corps émetteur est opaque, le flux transmis à son interface avec l'air est finalement absorbé. Ainsi, l'absorption A est égale au facteur de transmission T_{12} entre le milieu 1 qui est l'air et le milieu 2 dont est constitué le corps émetteur. Examinons maintenant le rayonnement thermique émis par le corps. Puisqu'il est à température T_2, il existe à l'intérieur du corps un rayonnement en équilibre avec le reste de la matière par des processus d'émission et d'absorption. Ce rayonnement peut être transmis par l'interface vers l'extérieur du corps avec un facteur de transmission T_{21}. Cette discussion suggère que l'émissivité est proportionnelle au facteur de transmission T_{21}. Un calcul permet de montrer qu'il y a égalité. La réciprocité entrainant $T_{12} = T_{21}$, il en résulte que l'émissivité est égale à l'absorptivité ce qui constitue le résultat obtenu par Kirchhoff [1].

CONCLUSION

Le théorème de réciprocité doit être distingué du renversement temporel. Il est valable en présence de pertes dès lors que les milieux du système physique considéré sont décrits par des permittivités et perméabilités symétriques. Le théorème de réciprocité a de très nombreuses applications. Il faut en particulier retenir qu'un problème de rayonnement ou de diffusion qui échappe à l'intuition peut être beaucoup plus simple dans sa version réciproque.

RÉFÉRENCES

[1] G. Kirchhoff, Phil.Mag. S **20**, 1 (1860)

[2] R. J. Potton, Rep. Prog. Phys. **67**, 717 (2004)

[3] H. Benisty, P. Lalanne, J.J. Greffet, *Introduction to Nanophotonics*, (Oxford University Press, Oxford, 2022)

[4] R. Carminati, M. Nieto-Vesperinas, J.J. Greffet, J. Opt. Soc. Am. A **15**, 706 (1998)

[5] R. Carminati, J.J. Saenz, J.J. Greffet, M. Nieto-Vesperinas, Phys.Rev. A **62**, 012712 (2000)