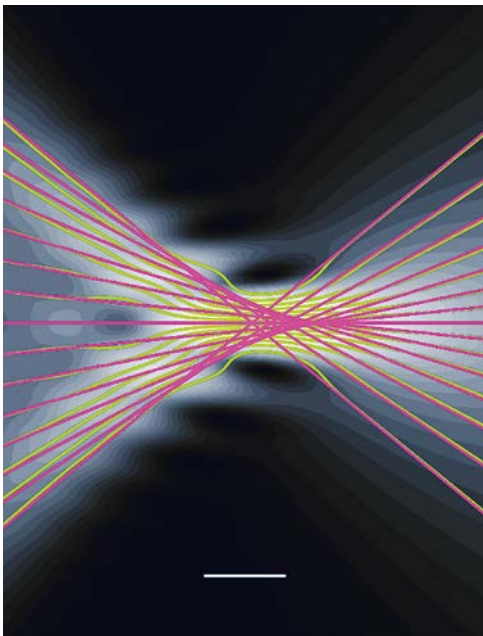


## LA THÉORIE ONDULATOIRE DE FRESNEL A-T-ELLE TUÉ LES RAYONS ?

# COMMENT RÉCONCILIER LES RAYONS ET LES ONDES

**Miguel ALONSO**

Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, Institut Fresnel, UMR 7249, 13397 Marseille Cedex 20, France  
The Institute of Optics, University of Rochester, Rochester, New York 14627, USA



**Il y a 200 ans, Fresnel a fourni des bases mathématiques au modèle ondulatoire de la lumière, capables de prédire même des phénomènes aussi surprenants à l'époque que la tache d'Arago. Donc, naïvement, on aurait pu penser que cette formalisation mettrait le dernier clou dans le cercueil du modèle précédent, celui de rayons. Cependant, les cours d'optique continuent à couvrir l'optique de rayons, et la plupart des logiciels pour la conception des systèmes imageurs sont basés sur ce simple et ancien modèle. Le modèle de rayons s'est donc révélé étonnamment résilient, et s'il est utilisé correctement, il est même capable de capturer de nombreux effets considérés souvent comme intrinsèquement ondulatoires.**

<https://doi.org/10.1051/photon/202010029>

Article publié en accès libre sous les conditions définies par la licence Creative Commons Attribution License CC-BY (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), qui autorise sans restrictions l'utilisation, la diffusion, et la reproduction sur quelque support que ce soit, sous réserve de citation correcte de la publication originale.

Certains phénomènes qui peuvent être contre-intuitifs du point de vue ondulatoire ont des interprétations très simples en termes des rayons, par exemple le caractère « *adiffractif* » et « *auto-guéissant* » des *faisceaux de Bessel* et *d'Airy*, et la phase *géométrique* résultante des transformations des *faisceaux d'Hermite-Gauss* et de *Laguerre-Gauss* [1].

Alors que le modèle de rayons est toujours utilisé et enseigné parallèlement à celui des ondes, la relation

entre les deux continue d'engendrer de la confusion. De nombreuses notions floues sont couramment mentionnées : les rayons sont normaux aux fronts d'ondes, ils sont des lignes de flux, ils représentent des ondes planes. Bien que ces interprétations soient approximativement correctes dans certaines situations, elles échouent dans d'autres. L'objectif de cet article est précisément de réfléchir sur l'interprétation du concept de rayon au sein du modèle d'onde, sur ses véritables limites et sur les raisons pour lesquelles ce modèle est souvent valable au-delà de ce que l'on pourrait penser [2].

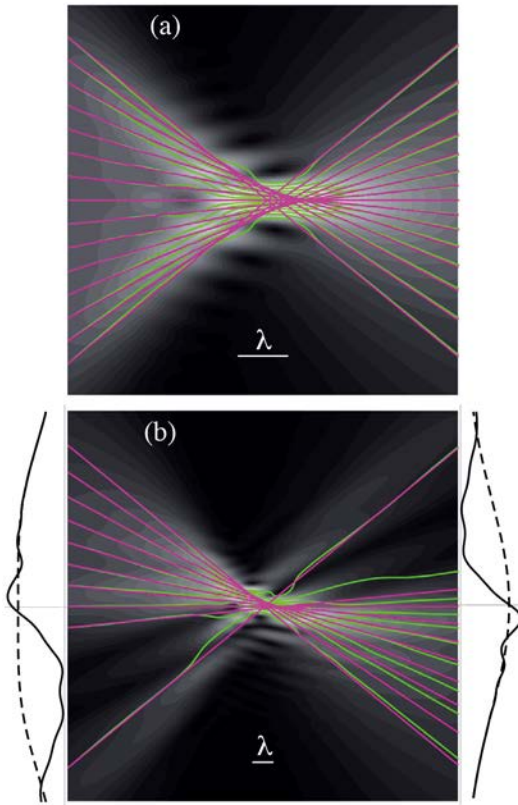
Pour faciliter la discussion, considérons des champs monochromatiques scalaires dans un milieu transparent (*i.e.* avec indice de réfraction réel), qui sont des solutions de l'équation de Helmholtz :

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k^2 n^2(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

où  $U(\mathbf{r})$  est le champ au point  $\mathbf{r}$ , et  $k = 2\pi/\lambda$  est le nombre d'onde dans le vide.

### CONNEXION LOCALE ENTRE RAYONS ET LIGNES DE FLUX

Le développement du modèle des rayons présenté ci-dessous est basé



**Figure 1.**

Rayons (magenta) et lignes de flux (vert) pour (a) un champ focalisé avec aberration sphérique, et (b) quand une partie de ce champ est bloqué. L'échelle en gris indique l'intensité, qui est montrée aussi comme courbes continues en (b) pour les lignes initiale et finale. Pour référence, l'intensité sans l'obstacle est montrée aussi (courbe pointillée).

sur une analyse locale, où le champ est séparé en termes d'amplitude et de phase comme  $U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp[ik\Phi(\mathbf{r})]$ , avec  $A(\mathbf{r})$  et  $\Phi(\mathbf{r})$  réels. La substitution de cet ansatz dans l'équation (1) et la séparation des parties réelles et imaginaires donne les deux équations suivantes :

$$|\nabla\Phi(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r}) - \frac{\Delta A(\mathbf{r})}{k^2 A(\mathbf{r})}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = A^2 \nabla\Phi = \frac{1}{k} \text{Im}(U^* \nabla U). \quad (3)$$

L'équation (3) est une *équation de transport* (ou de conservation d'énergie) pour le vecteur  $\mathbf{S}$ , qui est l'équivalent du vecteur de Poynting pour un champ scalaire. Cela signifie que le flux net d'énergie en un point pointe dans la direction du gradient local de la phase. L'équation (2), en revanche, ressemble étroitement à celle connue sous le nom d'*équation eikonale* :

$$|\nabla\Phi_E(\mathbf{r})|^2 = n^2(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Cette équation a une interprétation simple : puisque la *fonction eikonale*  $\Phi_E$

représente une longueur de chemin optique, le côté gauche représente le carré de l'avance de chemin optique par rapport à la distance réelle. L'équation eikonale nous indique alors que ledit rapport chemin optique / distance réelle est égal à l'indice de réfraction local. Cette équation peut être résolue paramétriquement le long de trajectoires, les *rayons*, dont les directions coïncident localement avec celles de  $\nabla\Phi_E(\mathbf{r})$ . Toutes les formes alternatives de l'optique des rayons, comme la loi de réfraction d'Ibn Sahl-Descartes-Snell ou le principe de Fermat, peuvent être retrouvées à partir de cette équation.

L'équation (2), cependant, comprend un terme en plus par rapport à l'équation eikonale (4). Ce terme est négligeable dans des régions où la variation de l'intensité sur des échelles comparables à la longueur d'onde est négligeable, c'est-à-dire, où le champ ressemble localement à une onde plane. Dans des régions où les variations d'amplitude sont les plus

importantes, telles que les zones focales, le terme supplémentaire dans l'équation (2) est significatif, et provoque un changement de direction des trajectoires localement parallèles à  $\nabla\Phi(\mathbf{r})$ , les *lignes de flux*, qui ne se croisent jamais contrairement aux rayons. Cela semble suggérer que le modèle de rayons perd sa connexion rigoureuse avec celui des ondes dans les régions focales où les rayons se croisent. Comme nous le verrons plus tard, ce n'est pas le cas.

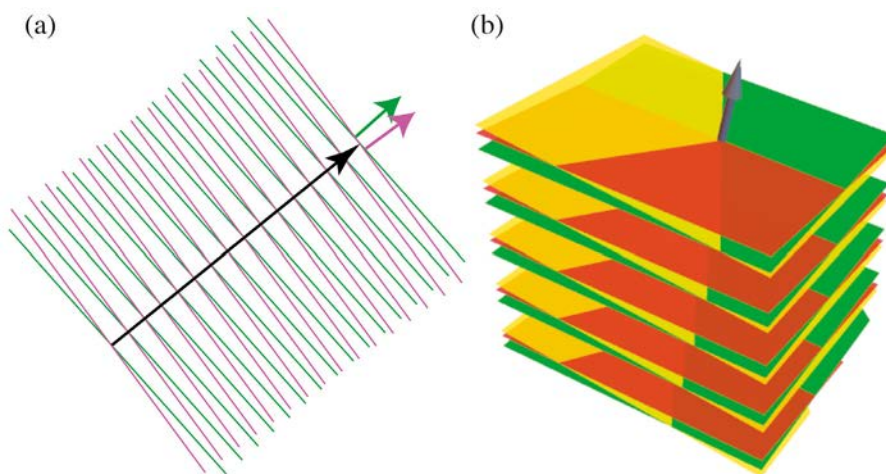
L'une des vertus de la solution paramétrique de l'équation eikonale est que les rayons suivent des trajectoires découplées, qui sont rectilignes dans des milieux homogènes. En revanche, le terme supplémentaire dans l'équation (2) provoque le couplage des lignes de flux qui les rend difficiles à calculer, et qui les fait fléchir même dans le vide. La *figure 1a* illustre les différences entre rayons et lignes de flux pour un champ focalisé avec des aberrations : loin de la région focale, les rayons (magenta) prédits par l'équation (4) et les lignes de flux (vert) prédites par l'équation (2) coïncident approximativement, mais ils diffèrent notablement dans la région focale. La *figure 1b* illustre l'effet d'un objet opaque bloquant une partie du champ incident loin de la région focale, où l'on peut voir une région obscure (une ombre) qui suit les rayons et non les lignes de flux (qui en effet sont fortement perturbées). Donc, les rayons nous donnent une meilleure idée de l'effet des obstacles sur le champ. Les lignes de flux, par contre, nous indiquent la direction locale de la force que le champ exercerait sur une petite particule absorbante, et la trajectoire que la particule suivrait en l'absence d'inertie.

### CONNEXION ENTRE LES RAYONS ET LES ONDES PLANES

Il existe une manière différente et complémentaire de connecter les rayons aux ondes. Commençons avec le cas simple de l'espace libre, où le champ peut être exprimé comme une

**Figure 2.**

(a) Dans un espace bidimensionnel, deux ondes planes avec une séparation angulaire infinitésimale sont en phase seulement le long d'une ligne, le rayon. b) Dans l'espace tridimensionnel, le rayon est la ligne où trois ondes planes avec une séparation angulaire infinitésimale sont en phase.



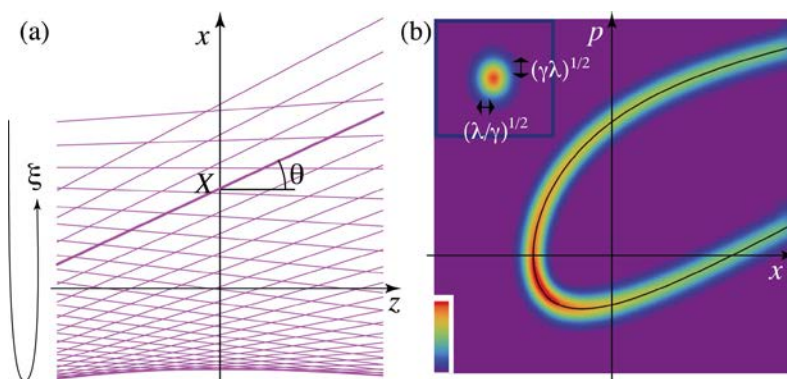
superposition d'ondes planes (supposées non évanescentes). Supposons que l'amplitude de ces composantes soit fonction de leur direction, le spectre angulaire étant alors une fonction continue et régulière. Considérons un petit sous-groupe de composantes planes dont les vecteurs d'onde sous-tendent un angle solide infinitésimal autour d'une direction spécifique. Ces ondes n'interfèrent en phase que le long d'une seule ligne droite en cette direction (figure 2), ce qui peut être considéré comme un rayon. C'est-à-dire, que les rayons peuvent être interprétés comme les lignes où le spectre des ondes planes est localement constructif. Il est clair que dans cette interprétation, les rayons sont des lignes droites, libres de se croiser. De plus, cette interprétation permet le processus inverse d'association d'une onde plane à chaque rayon, où la phase de chacune est choisie telle qu'elles

interfèrent constructivement avec celles des rayons voisins. Cette prescription est par exemple la base des méthodes de Debye-Wolf (scalaire) ou de Richards-Wolf (vectoriel) pour la modélisation des champs focalisés par des systèmes optiques.

Cette deuxième façon de comprendre la connexion entre les rayons et les ondes résout les problèmes de l'approche locale de la section précédente, mais elle souffre également de problèmes : sa généralisation n'est pas claire quand le champ se propage dans des milieux inhomogènes (où les ondes planes ne sont plus valides) ; même dans des milieux homogènes cette interprétation échoue lorsque le spectre angulaire n'est pas une fonction continue et régulière, ou même lorsqu'il présente des variations rapides ou des oscillations (e.g., les faisceaux d'Hermite-Gauss et de Laguerre-Gauss).

**« HABILLANT »  
LES RAYONS AVEC DES  
CONTRIBUTIONS GAUSSIENNES**

Les deux approches précédentes montrent que, dans le contexte de la théorie des ondes, les rayons ont des interprétations radicalement différentes : ils peuvent être considérés comme des contributions complètement locales ou complètement délocalisées (ondes planes). Lorsque le champ et son spectre angulaire sont des fonctions lisses, les deux interprétations donnent des résultats essentiellement consistants. Cependant, la localité et la complète délocalisation peuvent causer des problèmes. Ces problèmes peuvent être évités si un compromis est trouvé dans lequel les rayons sont associés à des contributions de champ à extension finie. La forme analytique naturelle à choisir pour ces contributions est la fonction gaussienne qui minimise conjointement les extensions dans ●●●



**Figure 3.**

(a) Famille de rayons paramétrisés pour  $X(\xi)$  et  $P(\xi)$ . (b) La courbe  $[X(\xi), P(\xi)]$  (noire) dans l'espace des phases  $x$  vs  $p$ . Pour connecter les rayons aux ondes, chaque point de cette courbe est « habillé » d'une contribution gaussienne comme celle dans l'encart.

l'espace réel et l'espace de Fourier (*i.e.* directionnel). Plusieurs méthodes basées sur la superposition de faisceaux gaussiens autour des rayons ont été proposées indépendamment dans différentes disciplines régies par des équations d'onde, telles que l'optique, la sismologie et la chimie quantique.

Une méthode pour connecter les rayons et les ondes a été proposée

dans laquelle les contributions gaussiennes ne sont pas nécessairement des faisceaux indépendants [3]. Cette méthode peut être visualisée par le concept de l'espace des phases. Pour simplifier la description, considérons un champ qui se propage vers des valeurs positives de  $z$  dans un espace à deux dimensions, où la coordonnée transversale est  $x$ . Dans chaque

ligne de  $z$  constante, chaque rayon peut être représenté comme un point dans un espace de phase, dont les coordonnées sont  $X$  (la position transversale) et  $P = n \sin \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre le rayon et l'axe  $z$  (*figure 3a*). Tous les rayons qui composent le champ constituent une famille continue et donc une courbe  $[X(\xi), P(\xi)]$  dans l'espace des phases  $x$  vs  $p$ , où  $\xi$  est un paramètre qu'identifie chaque rayon. Le champ ondulatoire sur la même ligne de  $z$  constante, peut également être représenté dans cet espace des phases via une transformée de Fourier avec une fenêtre gaussienne mobile centrée sur  $x$  :

$$G(x, p; z) = C \exp(ikxp/2) \int U(x', z) \exp\left[-\frac{k\gamma(x'-x)^2}{2}\right] \exp(-ikx'p) dx', \quad (5)$$

où  $\gamma$  est un paramètre qui définit la largeur des gaussiennes et  $C$  est une constante de normalisation.

Pour les champs dans lesquels les rayons et les ondes ont une correspondance valide, les valeurs maximales de  $|G|$  suivent la courbe  $[X(\xi), P(\xi)]$ . En fait, les rayons peuvent être « habillés » par des gaussiennes selon la formule [3] :

$$U(x, z) \approx \int h\sqrt{\gamma X'+iP'} \exp\left\{-\frac{k\gamma(x-X)^2}{2} + ik[L+(x-X)P]\right\} d\xi, \quad (6)$$

où  $h(\xi)$  est une fonction de poids pour chaque rayon et  $L(\xi)$  est leur longueur optique. Un aspect notable de cette formule est que l'estimation du champ qu'elle donne est asymptotiquement insensible (pour  $k$  grand) au choix de  $\gamma$ .

La *figure 3b* montre une interprétation visuelle de cette méthode, résultante de la substitution de l'équation (6) dans l'équation (5). Les contributions pour chaque rayon correspondent à des taches gaussiennes dans l'espace des phases dont l'étendue dépend du paramètre  $\gamma$ . Pour que la connexion entre les rayons et les ondes soit valide, le revêtement de la courbe  $[X(\xi), P(\xi)]$  avec des taches gaussiennes doit laisser la courbe reconnaissable (tout comme un trait

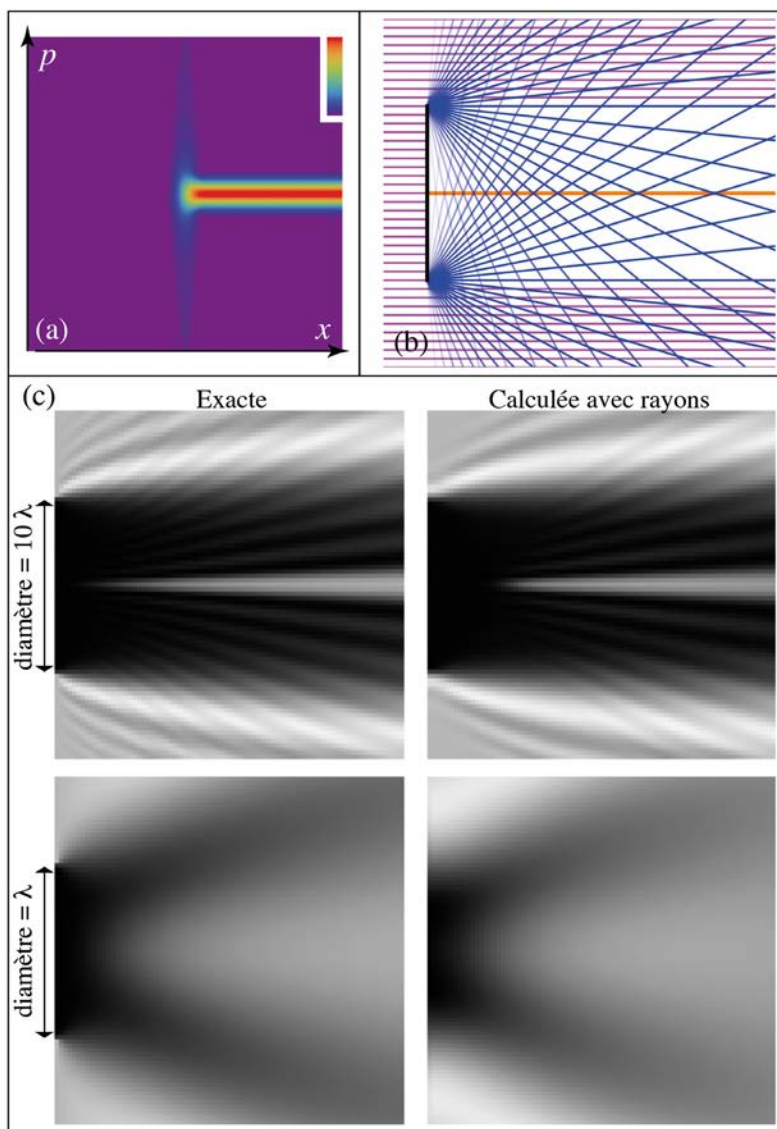


Figure 4.

- (a) Une discontinuité dans le champ cause une extension verticale de la distribution d'espace des phases en l'équation (4), qui suggère la génération des rayons diffractés.  
 (b) Rayons incidents (magenta) et diffractés (bleu). Pour un disque opaque normal à l'onde incidente, les rayons diffractés convergents croisent l'axe de symétrie rotationnel (ligne orange).  
 (c) Intensité sur la section transversale calculée avec la théorie ondulatoire (gauche) et les rayons (droite) pour différents diamètres du disque.

de graffiti n'est lisible que si la peinture aérosol a une tache capable de résoudre les détails du trait). Les approches locale et délocalisée des sections 2 et 3 correspondent respectivement aux limites  $\gamma \rightarrow \infty$  et  $\gamma = 0$ .

### EFFETS DE DIFFRACTION

Finissons en considérant un aspect pertinent pour le bicentenaire de la théorie des ondes de Fresnel : la diffraction et la célèbre tache d'Arago. Supposons qu'un obstacle bloque une partie d'un champ de propagation dans un certain plan, créant une discontinuité. Cette discontinuité cause, en utilisant l'équation (5), une distribution dans l'espace des phases qui est non seulement interrompue, mais s'étend aussi dans la direction verticale, comme le montre la *figure 4a*. Cela suggère l'introduction de nouveaux rayons « diffractés » émanant du bord de l'obstacle dans de multiples directions, comme ceux montrés à la *figure 4b*. Ces rayons sont à la base de la *théorie géométrique de la diffraction* proposée par Keller.

En particulier, l'utilisation de rayons habillés de gaussiennes se traduit par une méthode libre de singularités capable de modéliser la diffraction [4].

La *figure 4* illustre l'interprétation de la tache d'Arago en termes de rayons, résultant d'une onde plane incidente dans un disque opaque. Du point de vue des rayons, cette tache résulte du fait que les rayons diffractés se coupent sur l'axe de symétrie du disque, où ils produisent une

région de haute intensité. Comme le montre la figure, une estimation du champ basée sur des rayons habillés de gaussiennes permet de reproduire correctement ce phénomène, même lorsque l'obstacle est de dimension comparable à la longueur d'onde.

### CONCLUSIONS

Le concept simple et intuitif du rayon est extrêmement utile dans la théorie des ondes et, lorsqu'il est utilisé et interprété correctement, permet des calculs précis même dans des situations où le champ et le milieu comportent des variations de l'ordre de la longueur d'onde. La robustesse de ce concept est due à la flexibilité de son interprétation : les rayons peuvent être associés à des contributions d'extension variable, du local au pleinement étendu.

Il convient de mentionner que deux autres limites qui renforcent la connexion rayon/onde ne sont pas discutées dans ce texte : la limite paraxiale avec des éléments simples, et celle de faible cohérence spatiale (avec, par exemple, les fonctions de Wigner [5]). Enfin, notez que les concepts présentés ici ne sont pas exclusifs à l'optique mais s'appliquent à d'autres phénomènes ondulatoires tels que la mécanique quantique, où les rayons sont remplacés par des trajectoires classiques, et les lignes de flux par des trajectoires bohmniennes. ●

## RÉFÉRENCES

- [1] M.A. Alonso, M.R. Dennis, Ray-optical Poincaré sphere for structured Gaussian beams, *Optica* 4, 476-486 (2017)
- [2] M.A. Alonso, *Rays and waves, Phase Space Optics: Fundamentals and Applications* (McGraw-Hill, 2009), pp. 237-278.
- [3] G.W. Forbes, M.A. Alonso, Using rays better. I-IV, *J. Opt. Soc. Am. A* 18, 1132-1145, 1146-1159, 1357-1370, 2557-2564 (2001)
- [4] M.A. Alonso, Ray-based diffraction calculations using stable aggregates of flexible elements, *J. Opt. Soc. Am. A* 30, 1223-1235 (2013)
- [5] M.A. Alonso, Wigner functions in optics: describing beams as ray bundles and pulses as particle ensembles, *Adv. Opt. Phot.* 3, 272-365 (2011)

The World's  
Most Influential  
Optoelectronic Exhibition

CHINA INTERNATIONAL  
OPTOELECTRONIC  
EXPO

CIOE  
2020

SEPT. 9-11, 2020  
SHENZHEN • CHINA



INFORMATION AND  
COMMUNICATION  
EXPO



INFRARED  
APPLICATIONS  
EXPO



LASERS TECHNOLOGY &  
INTELLIGENT MANUFACTURING  
EXPO



PRECISION OPTICS,  
LENS & CAMERA MODULE  
EXPO



PHOTONICS  
INNOVATION  
EXPO



OPTOELECTRONIC  
SENSOR  
EXPO

Exhibition Area 110,000m<sup>2</sup>  
Exhibitor 2,000+  
Visitors 70,000+

For more information, please visit  
<http://www.cioe.cn/en/>