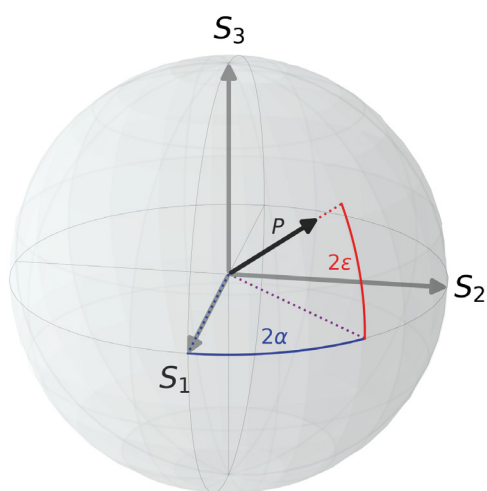


# LA SPHÈRE DE POINCARÉ

**Matthieu BOFFETY\* et Romaric JOURNET**

Université Paris-Saclay, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Laboratoire Charles Fabry, 91127 Palaiseau, France

\*matthieu.boffety@institutoptique.fr



**Propriété fondamentale de la lumière, la polarisation fait intervenir une théorie mathématique riche liée à son caractère multidimensionnel. Néanmoins, cette caractéristique pose aussi le défi de sa représentation géométrique. Introduite à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, la sphère de Poincaré est un outil qui répond à cette problématique. Elle permet de représenter géométriquement un état de polarisation quelconque ainsi que l'effet d'un milieu sur l'état de la lumière qui le traverse. Cet article revient sur sa construction et son utilisation pratique.**

<https://doi.org/10.1051/photon/2026313647>

Article publié en accès libre sous les conditions définies par la licence Creative Commons Attribution License CC-BY (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), qui autorise sans restrictions l'utilisation, la diffusion, et la reproduction sur quelque support que ce soit, sous réserve de citation correcte de la publication originale.

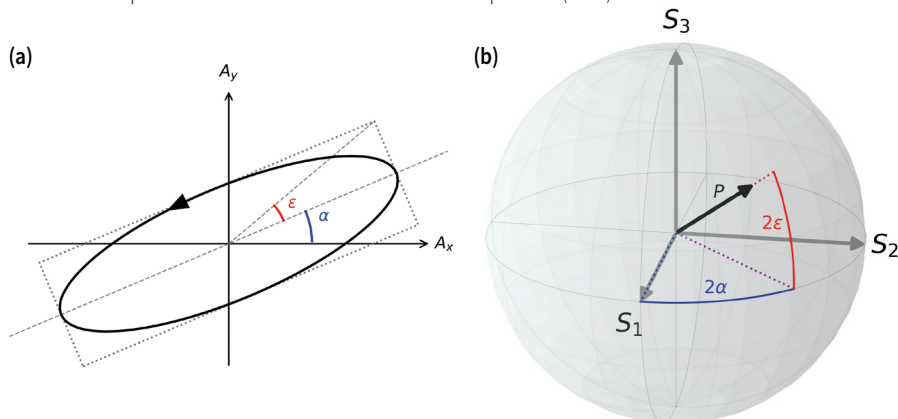
## POLARISATION DE LA LUMIÈRE ET PARAMÈTRES DE STOKES

La polarisation de la lumière est définie comme la trajectoire du champ électrique  $E$  de l'onde électromagnétique dans le plan transverse au vecteur d'onde [1]. Pour un rayonnement monochromatique, dont les amplitudes et les phases restent constantes, la résolution de l'équation de propagation pour le champ amène à un système d'équations paramétriques correspondant à une trajectoire elliptique qui peut se réécrire pour retrouver l'équation de « l'ellipse de polarisation ». Cette ellipse est classiquement paramétrée par deux angles :  $\alpha$  son azimut, c'est-à-dire l'angle que fait son grand axe avec l'horizontale, et  $\varepsilon$ , son ellipticité, l'arc-tangente entre le petit axe et le grand axe (cf. Figure 1a). Cependant, les amplitudes et les phases sont généralement inaccessibles à la mesure directe. Dans la pratique, il est plus utile de se ramener

à des grandeurs observables. De plus, cette description ne vaut que pour des états totalement polarisés, c'est-à-dire pour lesquels la trajectoire du champ est déterministe, or dans le cas général, l'état de polarisation accessible à

la mesure se caractérise par une polarisation partielle due à des effets de moyennage (spatial, spectral, angulaire, temporel, etc.) liés au système d'acquisition. La description de cet état via l'ellipse de polarisation ●●●

**Figure 1.** (a) Ellipse de polarisation paramétrée par son azimut  $\alpha$  et son ellipticité  $\varepsilon$ . La flèche noire représente le sens de rotation du vecteur champ au cours du temps. Ici, la polarisation est dite « gauche » (sens de rotation anti-horaire). (b) Représentation d'un état de polarisation, de degré de polarisation  $P$ , sur la sphère de Poincaré. Les angles  $(\alpha, \varepsilon)$  correspondent aux angles de l'ellipse de polarisation associée à l'état de polarisation si celui-ci avait été totalement polarisé ( $P = 1$ ).



n'est donc plus possible. On préfère alors utiliser le formalisme de Stokes qui, pour décrire un état de polarisation, s'appuie sur les 4 paramètres introduits en 1852 par Georges Gabriel Stokes 40 ans avant que Jules Henri Poincaré ne développe sa représentation sphérique des états de polarisation [2]. Ces paramètres sont des grandeurs réelles accessibles via des mesures d'intensité simples :

$$\begin{cases} S_0 = I_{0^\circ} + I_{90^\circ} \\ S_1 = I_{0^\circ} - I_{90^\circ} \\ S_2 = I_{45^\circ} - I_{-45^\circ} \\ S_3 = I_{\text{Gauche}} - I_{\text{Droite}} \end{cases} \quad (3)$$

où le terme  $S_0$  correspond à l'intensité totale de l'onde et les autres termes décrivent les caractéristiques polarimétriques de l'onde (linéaire à  $0^\circ$

ou  $90^\circ$  pour  $S_1$ , linéaire à  $\pm 45^\circ$  pour  $S_2$  et circulaire gauche ou droite pour  $S_3$ ) [3]. De plus, le formalisme de Stokes permet l'introduction du degré de polarisation  $P$  :

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \text{ avec } 0 \leq P \leq 1$$

qui décrit à quel point la lumière est polarisée. Un degré de polarisation de 1 indique un état purement polarisé décrit par l'ellipse de polarisation. Un degré de polarisation de 0 correspond à une lumière totalement dépolariée pour laquelle la trajectoire du champ électrique est complètement aléatoire. On peut alors montrer [3] que, pour une lumière de degré de polarisation  $P$ , les paramètres de Stokes s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} S_1 = S_0 P \cos 2\alpha \cos 2\varepsilon \\ S_2 = S_0 P \sin 2\alpha \cos 2\varepsilon \\ S_3 = S_0 P \sin 2\varepsilon \end{cases}$$

où  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont l'azimut et l'ellipticité de l'ellipse de polarisation associée à l'état de la lumière si celle-ci devait avoir un degré de polarisation égal 1. Ces trois paramètres permettent alors de définir le vecteur  $\mathbf{v} = [S_1/S_0, S_2/S_0, S_3/S_0]$ , de norme  $P$ , appelé vecteur de Stokes réduit, correspondant aux coordonnées sphériques de l'état de polarisation dans un espace qui n'est autre que celui de la sphère de Poincaré (cf. Figure 1b).

**REPRÉSENTER UN ÉTAT DE POLARISATION SUR LA SPHÈRE DE POINCARÉ**

La sphère de Poincaré constitue alors un outil pratique et naturel pour

**CONSTRUCTION HISTORIQUE DE POINCARÉ**

L'introduction par Poincaré de la représentation des états de polarisation sur une sphère qui porte aujourd'hui son nom s'est semble-t-il faite de façon indépendante des travaux de Stokes. En effet, si aujourd'hui la sphère de Poincaré est largement associée aux paramètres de Stokes, Poincaré ne semblait pas connaître les travaux de son prédécesseur [2] et sa construction s'appuyait sur des arguments géométriques simples à partir d'une représentation dans le plan complexe du champ électromagnétique.

L'idée consiste à représenter dans le plan complexe le ratio des amplitudes complexes du champ électrique [1]:  $A_x/A_y = u + iv$ , qui est indépendant de l'intensité totale et de la phase globale de l'onde. Dans ce plan représenté en Figure A l'axe  $v = 0$ , en rouge, correspond à l'ensemble des polarisations linéaires ; en effet, pour une polarisation linéaire il n'y a pas de déphasage entre les directions de polarisation suivant  $x$  et  $y$  donnant une partie imaginaire nulle pour le ratio  $A_x/A_y$ . En particulier, l'origine du repère correspond à une polarisation linéaire verticale ( $A_x = 0$ ), alors que la polarisation linéaire horizontale ( $A_y = 0$ ) se trouve « à l'infini ». L'axe  $u = 0$  en bleu, représente quant à lui l'ensemble des polarisations elliptiques d'azimut nul, c'est-à-dire dont les axes propres sont alignés avec les axes  $x$  et  $y$  de référence [1].

À partir de ce plan, la sphère de Poincaré se construit en faisant une projection stéréographique du plan sur une sphère de diamètre 1. On considère la sphère tangente au plan en l'origine  $O$ , comme sur la Figure A, on associe à un point  $M$  du plan le point d'intersection entre la sphère et le segment  $H'M$ , noté  $M'$ . La droite  $v = 0$  des polarisations linéaires est ainsi envoyée sur l'équateur, et les deux polarisations circulaires ( $c_g$  et  $c_d$ ) sont envoyées aux pôles.

Enfin, la polarisation horizontale qui se trouvait « à l'infini » est ramenée sur le point  $H'$ .

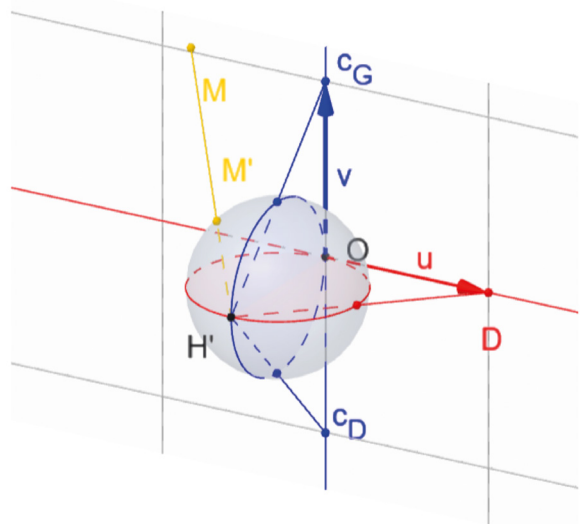


Figure A : Construction de la sphère de Poincaré à partir du plan complexe (u, v). Les polarisations linéaires sont représentées par la droite rouge dont le projeté sur la sphère est l'équateur. L'origine O correspond à une polarisation verticale, le point D = (1, 0) à une polarisation diagonale à  $45^\circ$  et  $H'$  est la projection de la polarisation horizontale. La droite bleue représente les polarisations elliptiques d'azimut nul, les points remarquables  $c_g = (0, 1)$  et  $c_d = (0, -1)$  correspondent aux polarisations circulaires gauche et droite. Le point M correspond à une polarisation générique de projetée  $M'$ .

## UTILISATION DE LA SPHÈRE DE POINCARÉ EN PHYSIQUE QUANTIQUE : LA SPHÈRE DE BLOCH

Au-delà de son usage pour représenter les états de polarisation de la lumière, une construction analogue à la sphère de Poincaré est également utilisée pour représenter l'état de systèmes quantiques « à deux niveaux ». Dans ce contexte, elle est plus couramment connue sous le nom de *sphère de Bloch*, en l'honneur de Félix Bloch.

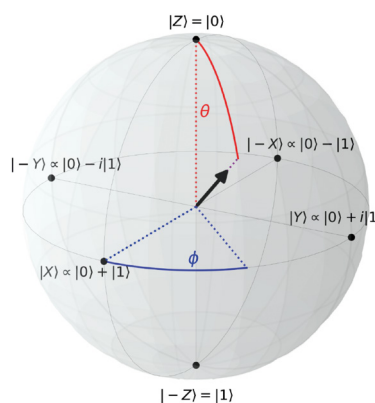
Un système quantique à deux niveaux peut être décrit par des vecteurs complexes normés de dimension deux qui représentent la superposition entre deux états quantiques orthogonaux. Ceci peut être rapproché d'une version normalisée du vecteur de Jones, autre formalisme classique utilisé en polarisation [1] et reposant sur l'utilisation des amplitudes complexes  $A_x$  et  $A_y$  du champ. On peut donner comme exemples de tels systèmes, les états de polarisations verticale et horizontale pour un photon, les états fondamental et excité d'un atome, ou encore les états spin « up » et « down » d'un électron. Dans le contexte du calcul quantique, ces différents systèmes sont des exemples de « bit quantique », on note alors traditionnellement les états de base  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , par analogie avec les deux états possibles d'un bit classique. Un état générique  $|\psi\rangle$  peut alors s'écrire à une phase globale près :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi] \quad (1)$$

en analogie totale avec le formalisme de Jones. On peut donc représenter sur une sphère les états quantiques possibles d'un bit quantique, ainsi que les opérations qu'on peut faire sur cet objet.

Comme pour l'état de polarisation, l'intérieur de la sphère de Bloch a une interprétation en termes d'états imparfaitement connus, on parle de mélanges statistiques pour l'intérieur de la sphère et d'états purs pour les états à la surface de la

sphère de Bloch. On peut visualiser ces mélanges comme « l'état moyen » produit par une expérience qui génère aléatoirement des états purs bien choisis. Par exemple, l'état au centre de la sphère peut être vu comme résultant de la production d'un état  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  avec probabilité 1/2. On peut représenter un état quelconque par un vecteur analogue au vecteur de Stokes réduit qu'on appelle *vecteur de Bloch*  $\vec{V}$ . Les composantes de ce vecteur s'obtiennent en mesurant la valeur moyenne de la projection de l'état suivant les trois directions particulières  $|X\rangle / |-X\rangle$ ,  $|Y\rangle / |-Y\rangle$  et  $|Z\rangle / |-Z\rangle$ , de la même façon que le vecteur de Stokes est construit en mesurant l'intensité (et donc une moyenne) pour des polarisations verticale/horizontale, linéaire à 45° / linéaire à 135° et circulaires gauche/droite. La norme carrée du vecteur de Bloch s'appelle la *pureté* avec une interprétation similaire à celle du degré de polarisation pour le cas du vecteur de Stokes, plus elle est proche de 1 et plus l'état est pur.



**Figure B :** Représentation de la sphère de Bloch avec un vecteur de Bloch générique. Les paires de points antipodaux représentent les issues possibles des mesures suivant les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ .

représenter géométriquement un état de polarisation quelconque à partir de 3 paramètres : le degré de polarisation  $P$ , l'azimut  $\alpha$  – appelé aussi angle de polarisation – et l'ellipticité  $\varepsilon$ .

Ainsi, les états associés à une lumière totalement polarisée ( $P=1$ ) se trouvent à la surface de la sphère de rayon 1. Une lumière totalement dépolarisée sera représentée par un point au centre de la sphère ( $P=0$ ) et tout état partiellement polarisé par un point à l'intérieur de la sphère (vecteur de norme  $P$ ).

L'équateur ( $\varepsilon = 0$ ) correspond au domaine des états linéaires ( $S_3 = 0$ ). Les états circulaires ( $S_1 = S_2 = 0$ ) se trouvent sur les pôles ( $\varepsilon = \pm \frac{\pi}{4}$ ). Le reste de la sphère représente les états elliptiques.

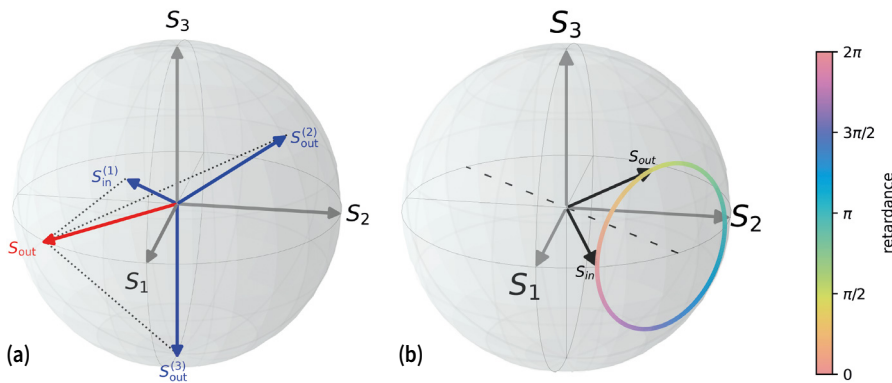
Compte-tenu des conventions choisies ici, l'hémisphère nord ( $\varepsilon > 0$ ) est le domaine des états « gauches » (le champ électrique tourne dans le sens trigonométrique quand la lumière se propage vers l'observateur) et l'hémisphère sud ( $\varepsilon < 0$ ) le domaine des états « droits » (le champ électrique tourne dans le sens horaire quand la lumière se propage vers l'observateur).

Il est aussi intéressant de noter le facteur 2 qui existe entre les angles dans le plan de l'ellipse de polarisation et sur la sphère de Poincaré. Ainsi, un état de polarisation linéaire orienté d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale se situera sur l'équateur à un angle  $2\alpha$  par rapport à l'axe  $OS_1$ . De

manière analogue, deux états orthogonaux sont représentés par deux points diamétralement opposés (antipodaux) sur la sphère de Poincaré.

### MODIFICATION D'UN ÉTAT DE POLARISATION

Dès 1892, Henri Poincaré s'appuyait sur la sphère pour expliquer des effets tels que le pouvoir rotatoire ou la biréfringence de lames cristallines. Néanmoins, la représentation vectorielle des paramètres de Stokes au travers du vecteur de Stokes réduit introduit à la première section permet de définir un cadre algébrique phénoménologique plus général pour modéliser la modification d'un état de polarisation [1]. ●●●



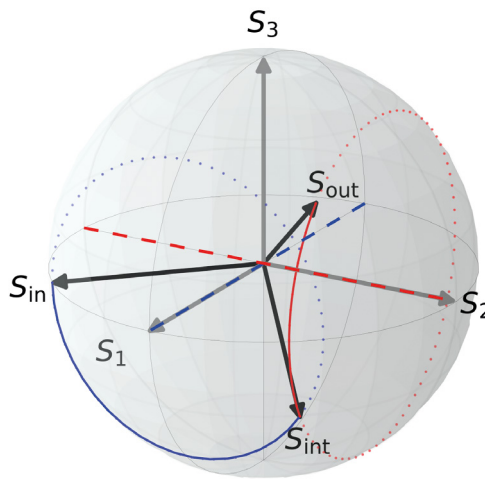
**Figure 2.** (a) Effet d'un polariseur linéaire sur un état de polarisation : quel que soit l'état incident (en bleu) l'état en sortie se trouve sur la surface de la sphère et aligné avec l'état propre du polariseur (en rouge). (b) Effet d'un retardateur variable linéaire sur un état incident  $S_{in}$ . L'axe en tiret relie les deux états propres du retardateur sur la sphère de Poincaré. L'effet du retardateur correspond à une rotation autour de cet axe d'un angle égal au déphasage du retardateur. Les couleurs du cercle donnent la position du vecteur  $S_{out}$  en fonction du déphasage (ou retardance) du retardateur.

Ce cadre a été introduit par Hans Mueller dans un cours au MIT en 1946 [4] et permet de modéliser cette modification de l'état de polarisation comme une transformation géométrique dans l'espace de la sphère de Poincaré. Deux exemples de composants sont particulièrement intéressants pour illustrer l'utilité de la sphère de Poincaré dans ce cas.

Tout d'abord, les polariseurs idéaux, qui réalisent une transformation correspondant à une projection sur leur état propre (leur « axe » pour les polariseurs linéaires). Quel que soit l'état d'entrée, l'état de la lumière en sortie d'un tel composant est totalement polarisé et est représenté par un point à la surface de la sphère de Poincaré correspondant à l'état propre du polariseur (cf. Figure 2a).

Autre type de composants, les retardateurs, comme les lames de phase par exemple, qui introduisent un déphasage entre deux états propres. On montre que cette fonction optique correspond à réaliser une rotation sur la sphère de Poincaré d'un angle donné par le déphasage (ou retardance) de la lame autour de l'axe qui relie les deux états propres du composant sur la sphère (cf. Figure 2b). Ces considérations servent de fondement à la modélisation et à la réalisation de systèmes permettant de générer n'importe quel état totalement

Figure 3. Génération d'un état de polarisation quelconque à partir d'un état polarisé linéairement ( $S_{in}$ ) et de deux composants à retard variable. La lumière passe ensuite à travers un premier retardateur dont les axes sont à  $22,5^\circ$  de l'état linéaire et entraîne une rotation du point  $S_{in}$  vers le point  $S_{int}$ . La lumière passe ensuite à travers un second retardateur dont les axes sont à  $45^\circ$  du précédent et qui entraîne une rotation du point  $S_{int}$  vers le point  $S_{out}$ , état final généré par le système.



polarisé (appelés généralement *polarization state generator* ou PSG). En effet, deux paramètres angulaires permettant de décrire complètement la sphère ( $\alpha$  et  $\epsilon$ ), il suffit de concevoir un système ayant deux degrés de liberté autorisant deux rotations indépendantes sur la sphère. Ainsi, la majorité des PSG sont constitués d'une source associée à un polariseur (généralement linéaire, état initial sur l'équateur de la sphère) et combinée avec deux déphaseurs mobiles (généralement des lames de phase rotatives, déphasage fixe mais axes variables) ou deux éléments à retard variable (comme des cristaux liquides, déphasages variables mais axes fixes orientés à  $45^\circ$  les uns des autres) [2]. Cette combinaison permet de partir d'un point sur l'équateur de la sphère et d'arriver à n'importe quel point de la sphère par l'enchaînement de deux rotations d'axes perpendiculaires l'un à l'autre (Figure 3).

**CONCLUSION**

Outil formel développé il y a plus de 130 ans, la sphère de Poincaré est aujourd'hui largement utilisée dans la littérature scientifique pour représenter les états de polarisation ou les effets d'un milieu sur ces états. L'algèbre qui y est associée fait l'objet d'une recherche riche et active. Par exemple, des résultats importants sur la conception de systèmes sont obtenus en étudiant comment les états propres de ces systèmes discrétisent la surface de la sphère de Poincaré. Ces résultats permettent ainsi la mise en place d'un cadre théorique permettant d'étudier l'optimalité d'un système d'acquisition en fonction de l'application et des contraintes expérimentales. ●

**RÉFÉRENCES**

[1] J. Fade, M. Boffety et V. Devlaminck, *Photoniques* **109**, 57 (2021)  
 [2] W. Swindell, *Polarized Light*, Dowden, Hutchinson & Ross (1975)  
 [3] D. H. Goldstein, *Polarized light*, Marcel Dekker (2003)  
 [4] N. G. Parke, *J. Math. Phys.* **28** (1949)